Научная статья

УДК 517.962.22
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-96-138

О ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ПОЛНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОНИ

Андрей Александрович Ломов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия
lomov@math.nsc.ru, a.lomov@g.nsu.ru

Аннотация

В задаче Прони с вариационной целевой функцией аппроксимации наблюдений x суммой экспонент получены выражения для критических точек и вторых производных неявной зависимости $\theta(x)$ показателей экспонент от возмущений в данных x. Предложены оценки сверху для вторых приращений с определением области приемлемого по точности описания $\theta(x)$ линейным отображением. Как следствие, получены оценки снизу для норм отклонений $\theta(x)$ при малых возмущениях в x. Приведено сравнение с оценками сверху для норм отклонений $\theta(x)$ по неравенству Уилкинсона.

Ключевые слова и фразы

Разностные уравнения, идентификация коэффициентов, аппроксимация суммой экспонент, вариационная задача Прони, устойчивость решений.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008)

Для цитирования

Ломов А.А. О локальной устойчивости в полной задаче Прони // Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 96-138. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-96-138

ON LOCAL STABILITY IN THE COMPLETE PRONY PROBLEM

Andrey A. Lomov

Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of Russian Academy of Sciences
Novosibirsk State University
630090, Novosibirsk, Russia

lomov@math.nsc.ru, a.lomov@g.nsu.ru

Abstract
In the variational Prony problem of approximating observations x by the sum of exponentials, expressions are obtained for critical points and second derivatives of the implicit function $\theta(x)$ of exponents' dependence on x data. Upper bounds are proposed for the second order increments $\|\Delta_2\theta\|$ with a description of the Δx area where $\theta(x)$ is approximately linear. As a consequence, the lower bounds for $\|\Delta\theta\|$ are obtained for small perturbations in x. A comparison with the upper bounds for $\|\Delta\theta\|$ by Wilkinson's inequality is given.
Keywords
Difference equations, parameter identification, approximations by the sum of exponentials, variational Prony problem, local stability.
Funding
The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2022-0008)
For citation
*Lomov A. A.*On local stability in the complete Prony problem // Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 96-138. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-96-138

§ 1. Введение

В статье будем рассматривать частный случай задачи Прони [1] — восстановление суммы экспонент с вещественными показателями по наблюдениям с возмущениями. Общий случай комплексных показателей изучался в [2]; здесь рассматривается частный случай с целью получить более сильные оценки, чем в [2].

Проблема устойчивости в задаче восстановления показателей экспонент, по-видимому, впервые была поставлена К. Ланцошем в 1956 г.; на простом примере он показал, что для выделения трех вещественных экспонент из наблюдений суммы нужна относительная точность наблюдений заведомо выше, чем в третьем знаке мантиссы [3, IV.§23].

Свойства решений задачи Прони полностью определяются выбранной целевой функцией; понятно желание найти целевую функцию, гарантирующую устойчивость, как минимум, в примере К. Ланцоша.

Известны три подхода к решению задачи Прони: 1) классический, путем решения системы алгебраических уравнений в предположении нулевых возмущений в наблюдениях [1]; 2) линейный метод наименьших квадратов (МНК) с целевой функцией по невязке уравнения [4, 5]; 3) нелинейный метод наименьших квадратов с «вариационной» целевой функцией [4, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Задачу Прони с целевой функцией третьего типа мы называем полной, или вариационной. Вычислительные затраты, связанные с итеративным поиском минимума в полной задаче Прони, формально оправдываются доказательством сходимости решений к истинному при накоплении наблюдений со случайными аддитивными ошибками (например, ошибками округления) [12, 13]; целевые функции первого и второго типа такой состоятельности не обеспечивают [14].

Решения θ задач с минимизацией целевых функций имеют вид неявных функций $\theta(x)$ от данных x; функция $\theta(x)$ определяется условием равенства нулю градиента целевой функции. Устойчивость таких решений определяется производными Фреше $d\theta/dx$ [15]. В [16] была предпринята попытка на примере К. Ланцоша показать преимущество полной (вариационной) формулировки задачи Прони с точки зрения устойчивости решений. Необходимые для этого производные $d\theta/dx$ были получены в [2, 18]. Показано [16], что в примере К. Ланцоша приемлемые по точности отклонения в векторе θ показателей экспонент (с относительной ошибкой $\|\Delta\theta\|/\|\theta\|$ не более одной десятой) могут быть получены только при погрешностях наблюдений не хуже, чем в пятом знаке мантиссы; при этом расчеты с целевой функцией МНК на порядок менее точны.

Важен вопрос, при каком уровне возмущений $\|\Delta x\|$ сохраняется близость отображения $\Delta x \mapsto \Delta\theta(x, \Delta x)$ к линейному отображению

$$\Delta\theta(x, \Delta x) = \theta(x + \Delta x) - \theta(x) \simeq [d\theta/dx] \cdot \Delta x.$$

По существу это вопрос о получении оценок для остаточного члена разложения неявной функции в ряд Тейлора до линейного слагаемого. При ответе мы получаем условие на малость возмущений, при котором можно сравнивать целевые функции (и соответственно, разные методы решения оптимизационных задач) по количественным показателям устойчивости точек минимума, исходя из производных Фреше $d\theta/dx$.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 96-138
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 96-138

Для вариационной задачи Прони подобного рода оценки величины окрестности «приближенной линейности» $\Delta\theta(\Delta x)$ были предложены в [2]. На основе теорем [2] были рассчитаны [18] оценки норм возмущений, при которых зависимость $\Delta\theta(x, \Delta x)$ «не сильно» отличается от линейной. Оказалось, что эти оценки на много порядков меньше ошибок округления при расчетах с двойной точностью, что нельзя назвать практически приемлемым результатом.

В настоящей работе исследуются окрестности «приближенной линейности» $\Delta\theta(\Delta x)$ для частного случая вариационной задачи Прони с чисто вещественными корнями характеристического уравнения. Техника получения оценок опирается на вариации фундаментального базиса из экспонент, в отличие от работы [2], в которой варьировались, попросту говоря, коэффициенты разностного уравнения. Расчеты по новым оценкам также показывают, что допустимый уровень возмущений существенно меньше ошибок округления при расчетах с двойной точностью.

Отмеченные факты не позволяют считать вопрос о локальной устойчивости в полной задаче Прони закрытым.

§ 2. Постановка задачи

Пусть дано линейное подпространство $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^N$ решений

$$y \doteq \begin{bmatrix} y_1; & \ldots; & y_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

однородного разностного уравнения с вещественными коэффициентами[1]

$$y_{k+n} + \alpha_{n-1} y_{k+n-1} + \ldots + \alpha_0 y_k = 0, \quad k = \overline{1, N-n}. \tag{1}$$

Будем считать, что характеристический многочлен

$$\alpha(\zeta) \doteq \zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \tag{2}$$

имеет только вещественные корни $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, без кратных и нулевых. Тогда в $\mathcal{Y}$ можно выбрать базис из столбцов фундаментальной матрицы

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \zeta_1 & \ldots & \zeta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \zeta_1^{N-1} & \ldots & \zeta_n^{N-1} \end{bmatrix}.$$

[1]Приняты обозначения $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \doteq [A, B]$, $\left[\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right] \doteq [A; B]$, $\top$ — символ транспонирования, $\doteq$ — знак равенства по определению.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 96-138
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 96-138

Определим векторный параметр $\theta \doteq \begin{bmatrix}\zeta_1; & \dots; & \zeta_n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $H = H(\theta)$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\theta)$. Выберем произвольную точку $x \doteq \begin{bmatrix}x_1; & \dots; & x_N\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$, которую будем называть данными задачи, или наблюдениями. Поставим задачу Прони аппроксимации данных x «наилучшим» решением y разностного уравнения (1). Целевая функция вариационной («полной») задачи Прони относительно неизвестного параметра θ имеет вид[2] [4]

$$J(\theta, x) = \|x - \hat{x}(\theta)\|^2, \quad \hat{x}(\theta) \doteq \arg\min_{y \in \mathcal{Y}_\theta} \|x - y\|^2.$$

Величину $\hat{x}(\theta)$ можно назвать аппроксимацией x. Учитывая равенство

$$\hat{x}(\theta) = H \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top x \doteq \Pi x, \tag{3}$$

запишем

$$J(\theta, x) = x^\top \left(I - \Pi(\theta)\right) x. \tag{4}$$

Задача сводится к поиску точки минимума

$$\theta(x) \doteq \arg\min_{\vartheta} J(\vartheta, x). \tag{5}$$

Определим неявную функцию $\theta(x)$ (5) из условия равенства нулю градиента целевой функции:

$$J'_\theta \doteq \frac{\partial J(\theta, x)}{\partial \theta} = 0.$$

Производная $d\theta/dx$ вычисляется из разложения градиента в ряд Тейлора

$$0 = J'_\theta(\theta + d\theta, x + dx) = 0 + J''_{\theta\theta}(\theta, x)d\theta + J''_{\theta x}(\theta, x)dx + R,$$

из которого следует

$$\frac{d\theta}{dx} = -\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x}.$$

Нас будет интересовать разложение в ряд Тейлора самой вектор-функции $\theta(x)$, с остаточным членом второго порядка в форме Лагранжа:

$$\theta(x+\Delta x) - \theta(x) = \left[\frac{d\theta}{dx}\right] \Delta x + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta x^\top \left[\frac{d^2\zeta_1}{dx^2}(x + \tau_n \Delta x, \theta)\right] \Delta x \\ \vdots \\ \Delta x^\top \left[\frac{d^2\zeta_n}{dx^2}(x + \tau_n \Delta x, \theta)\right] \Delta x \end{bmatrix} \doteq \Delta_1\theta + \Delta_2\theta,$$
$$\tau_i \in (0,1), \quad i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

[2] Используем евклидову норму векторов и согласованную с ней операторную [17] норму матриц $\|\cdot\| \doteq \|\cdot\|_2$. Фробениусовскую норму матриц обозначаем $\|\cdot\|_F$.

Окрестность

$$B(x) \doteq \{x+\Delta x : \|\Delta x\| < \varepsilon \doteq \varepsilon_x \|x\|\} \subset \mathbb{R}^N, \tag{7}$$

в которой норма остаточного члена $\|\Delta_2\theta\|$ ограничена неравенством $\|\Delta_2\theta\| < \varepsilon_{21}\|\Delta_1\theta\|$ с малым ε_{21}, назовем областью «приближенной линейности» $\Delta\theta(\Delta x)$. Задача состоит в нахождении оценок для величины ε_x при указанном ε_{21}.

Заметим, что в области $B(x)$, исходя из выражения для производной $d\theta/dx$ и оценок нормы остаточного члена $\|\Delta_2\theta\|$, получаются близкие к наилучшим верхние и нижние оценки нормы погрешности решения $\|\Delta\theta\|$. Нижняя оценка может использоваться для доказательства невозможности решения оптимизационной задачи с указанной точностью при известных погрешностях $\|\Delta x\|$. Выражения для погрешности первого порядка $\Delta_1\theta$, получаемые через производную $d\theta/dx$, могут служить инструментом сравнения различных целевых функций [18] в окрестности $B(x)$.

§ 3. Критические точки целевой функции

Введем обозначения

$$J_i' \doteq \frac{\partial J}{\partial \zeta_i}, \quad H_i' \doteq H_{\zeta_i}' \doteq \frac{\partial H}{\partial \zeta_i}, \quad \Pi_i' \doteq \Pi_{\zeta_i}' \doteq \frac{\partial H}{\partial \zeta_i},$$

тогда

$$\begin{aligned} J_i' &= -x^\top \Pi_i' x, \\ \Pi_i' &= H_i' \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top + H \left(H^\top H\right)^{-1} H_i'^\top \\ &\quad - H \left(H^\top H\right)^{-1} \left(H_i'^\top H + H^\top H_i'\right) \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top, \end{aligned}$$

где

$$H_i' = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & (N-1)\,\zeta_i^{N-2} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Критические точки вычисляются из системы уравнений $J_i' = 0$, $i = \overline{1,n}$. Получим более простой эквивалент этой системы уравнений.

Определим обозначения

$$H \doteq \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix}, \quad h_i' \doteq \frac{\partial}{\partial \zeta_i} h_i, \quad H' \doteq \begin{bmatrix} h_1' & \dots & h_n' \end{bmatrix} \tag{9}$$

(обратим внимание на различия между H' и H_i' (8)).

Определение 1. Данные x называем «полными», если аппроксимация (3) $\hat{x}(\theta) = H(\theta)c$, $c \doteq \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top x$ имеет все компоненты в векторе c ненулевыми:

$$\hat{x} = Hc = c_1 h_1 + \cdots + c_n h_n, \quad c_i \neq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Другими словами, данные x полны, если в аппроксимации участвуют все столбцы фундаментальной матрицы H разностного уравнения (1).

Теорема 1. *При условии полноты x критические точки $\theta(x)$ целевой функции $J(\theta, x)$ (4) описываются системой уравнений*

$$F(\theta)x = 0, \quad F(\theta) \doteq H'^\top (I - \Pi). \tag{10}$$

Доказательство. См. приложение. □

Замечание 1. Система уравнений (10) (как и целевая функция $J(\theta, x)$ (4)) не изменяются при невырожденной замене базиса подпространства решений (1): $H \mapsto HP, \det P \neq 0$. Как следствие, выражения для производных и все оценки можно получать для любой базисной матрицы H.

С учетом определения $\hat{x} = \Pi x$ уравнение $F(\theta)x = 0$ для критических точек может быть записано в виде

$$H'^\top (x - \hat{x}) = 0. \tag{11}$$

Это уравнение отличается от тождества

$$H^\top (x - \hat{x}) \equiv 0$$

заменой H на H'.

§ 4. Однозначность отображения $x \mapsto \theta(x)$

Назовем наблюдения x «чистыми», если $x = H(\vartheta)c$ для некоторых значений параметров $\vartheta, c \in \mathbb{R}^n$. Чистые наблюдения подчиняются уравнению (1) с характеристическим многочленом

$$\alpha(\zeta) = (\zeta - \vartheta_1) \ldots (\zeta - \vartheta_n).$$

Предложение 1. *Чистые данные x не полны в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда x является решением некоторого уравнения вида (1) меньшего порядка $m < n$.*

Доказательство. Пусть данные x не полны, тогда $x = c_1 h_1 + \dots + c_{n-1} h_{n-1}$ (без ограничения общности полагаем $c_n = 0$) подчиняется уравнению (1) с характеристическим многочленом

$$\overline{\alpha}(\zeta) = (\zeta - \vartheta_1) \dots (\zeta - \vartheta_{n-1})$$

порядка $m = n - 1 < n$. Обратное тоже верно. □

Предложение 2. *Для однозначности отображения $x \mapsto \theta(x)$ при чистых наблюдениях x необходимо и достаточно полноты x в смысле определения 1.*

Доказательство. См. приложение. □

Рассмотрим условие локальной однозначности отображения $x \mapsto \theta(x)$ при данных x общего вида. По аналогии с (9) определим обозначение

$$H'' \doteq \begin{bmatrix} h_1'' & \dots & h_n'' \end{bmatrix}, \quad h_i'' \doteq \frac{\partial^2}{\partial \zeta_i^2} h_i.$$

Также будем обозначать $D_c \doteq \operatorname{diag}[c_1, \dots, c_n]$ диагональную матрицу с диагональю из элементов вектора $c = [c_1, \dots, c_n]$.

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием локальной однозначности отображения $x \mapsto \theta(x)$ в полной задаче Прони является невырожденность матрицы $H'^{\top} H' D_c - D_p$, где $c = \left(H^{\top} H\right)^{-1} H^{\top} x$ — коэффициенты разложения аппроксимации $\hat{x} = Hc$ по фундаментальной системе решений уравнения* (1), *и $p = H''^{\top} (x - \hat{x})$.*

Доказательство. См. приложение. □

Следствие 1. *В случае малых возмущений $\|x - \hat{x}\| \ll \|x\|$ необходимым и достаточным условием локальной однозначности отображения $x \mapsto \theta(x)$ в полной задаче Прони является полнота наблюдений x.*

Доказательство. При малых возмущениях верно соотношение $\|H'^{\top} H' D_c\| \gg \|D_p\|$, поэтому критерий теоремы 2 сводится к невырожденности матрицы $H'^{\top} H' D_c$ и, ввиду линейной независимости столбцов матрицы H', к невырожденности матрицы D_c. Последнее равносильно отсутствию нулевых элементов в векторе c, т. е. полноте наблюдений x. □

§ 5. Вторые производные неявной функции $\theta(x)$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 96-138
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 96-138

Неявная вектор-функция $\theta(x)$ определена системой уравнений $F(\theta)x = 0$, где

$$F(\theta) = H'^{\top}(I - \Pi) \doteq \begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times N}.$$

С учетом замены J'_θ на Fx, лемма 1 из статьи [2] перейдет в следующее утверждение.

Теорема 3. *Определим матрицу частных производных* $Q \doteq (Fx)'_\theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Верны выражения:*

$$\begin{gathered} \frac{d\theta}{dx} = -Q^{-1}F \in \mathbb{R}^{n \times N}, \quad \frac{d\theta}{dx_k} = -Q^{-1}f_k \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{d^2\theta}{dx_j dx_k} = -Q^{-1}A_k Q^{-1} f_j + Q^{-1}Q'_{x_j}Q^{-1}f_k \in \mathbb{R}^n, \\ A_k \doteq \begin{bmatrix} a_{1,k} & \dots & a_{n,k} \end{bmatrix}, \quad a_{i,k} \doteq Q'_{\zeta_i}Q^{-1}f_k - (f_k)'_{\zeta_i} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \end{gathered} \tag{12}$$

Доказательство. См. приложение. □

Для получения матричной формы записи второй производной рассмотрим формулы для приращений. Ход рассуждений следующий. Пусть вещественнозначная функция $f = f(\theta, x)$ с вещественными аргументами θ, x имеет все необходимые производные; рассмотрим приращение первого дифференциала:

$$\begin{aligned} d_1(d_1 f) &\doteq d_1^2 f \doteq d^2 f = (df)'_\theta \, d\theta + (df)'_x \, dx \\ &= (f'_x dx + f'_\theta d\theta)'_\theta \, d\theta + (f'_x dx + f'_\theta d\theta)'_x \, dx \\ &= f''_{\theta\theta} d\theta d\theta + 2f''_{\theta x} d\theta dx + f''_{xx} dx dx = \begin{bmatrix} d\theta & dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{\theta\theta} & f''_{\theta x} \\ f''_{x\theta} & f''_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta \\ dx \end{bmatrix} = 2d_2 f, \end{aligned} \tag{13}$$

где $d_2 f$ – слагаемое второго порядка малости в ряде Тейлора с остаточным членом $R_3 \sim O(\| [d\theta, dx] \|^3)$,

$$df = d_1 f + d_2 f + R_3 = \begin{bmatrix} f'_\zeta & f'_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta \\ dx \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d\theta & dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{\theta\theta} & f''_{\theta x} \\ f''_{x\theta} & f''_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta \\ dx \end{bmatrix} + R_3.$$

Исходя из последнего выражения можно через приращение первого дифференциала получить выражение для матрицы вторых производных.

Далее первый дифференциал $d_1 f$ будем обозначать просто df, а случаи совместного упоминания первого $d_1 f$ и полного дифференциала $df = d_1 f + d_2 f + R_3$ будем оговаривать особо.

Символом δf обозначаем частное приращение функции $f(\theta, x)$ по указанным аргументам, например, $\delta f(d\theta) \doteq f'_\theta d\theta$, $\delta f(dx) \doteq f'_x dx$.

Предложение 3. *Верна формула*

$$d^2\theta = -Q^{-1}\delta Q(d\theta)\cdot d\theta - 2Q^{-1}\delta F(d\theta)\cdot dx.$$

Доказательство. См. приложение. □

Используя равенства $d^2\theta = [d^2\zeta_1;\ldots;d^2\zeta_n]$, $d^2\zeta_i = dx^\top (\zeta_i)''_{xx}\, dx$, $i=\overline{1,n}$, получаем выражения для матриц вторых производных $(\zeta_i)''_{xx}$.

Теорема 4. *Матрицы вторых производных* $(\zeta_1)''_{xx},\ldots,(\zeta_n)''_{xx}$ *неявной функции* $\theta(x)=[\zeta_1(x);\ldots;\zeta_n(x)]$ *выражаются формулами*

$$(\theta_i)''_{xx} \doteq (\zeta_i)''_{xx} = -F^\top Q^{-\top}\begin{bmatrix} e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_1}Q^{-1}F-2F'_{\zeta_1}\right)\\ \vdots \\ e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_n}Q^{-1}F-2F'_{\zeta_n}\right)\end{bmatrix},\quad i=\overline{1,n}.$$

Доказательство. См. приложение. □

§ 6. Оценки для остаточного члена второго порядка

Будем использовать известные свойства операторной нормы.

Лемма 1. *Верны утверждения:* 1) $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$; 2) *пусть* $A\doteq[a_1,\ldots,a_n]$; *неравенство* $\|A\|\leqslant\sqrt{\|a_1\|^2+\ldots+\|a_n\|^2}$ *неулучшаемо.*

В разложении (6) для компонент $\zeta_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ вектора $\theta(x)$ остаточный член запишем в виде

$$r_i \doteq \tfrac{1}{2}\Delta x^\top (\zeta_i)''_{xx}\,\Delta x, \tag{14}$$

где производные $(\zeta_i)''_{xx}$ берутся в точке $\theta(x), x+\tau_i\Delta x$, $\tau_i\in(0,1)$. Получим оценки для r_i, $i=\overline{1,n}$.

По теореме 4

$$(\zeta_i)''_{xx} = -F^\top Q^{-\top}\begin{bmatrix} e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_1}Q^{-1}F-2F'_{\zeta_1}\right)\\ \vdots \\ e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_n}Q^{-1}F-2F'_{\zeta_n}\right)\end{bmatrix}.$$

Отсюда следует

$$\left\|(\zeta_i)''_{xx}\right\| \leqslant \|F\|\cdot\|Q^{-1}\|\cdot\sqrt{\|a_1\|^2+\ldots+\|a_n\|^2}\leqslant\sqrt{n}\|F\|\cdot\|Q^{-1}\|\cdot\|a_j\|_{\max},$$

$$\|a_j\|_{\max}\doteq\max_j\|a_j\|,\quad a_j\doteq e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_j}Q^{-1}F-2F'_{\zeta_j}\right).$$

Учитывая $\|e_i\|=1$

$$\|a_i\|\leqslant\|Q^{-1}\|\left(\|Q'_{\zeta_i}\|\cdot\|Q^{-1}\|\cdot\|F\|+2\|F'_{\zeta_i}\|\right).$$

Тогда

$$\left\|(\zeta_i)''_{xx}\right\|\leqslant\sqrt{n}\|F\|\cdot\|Q^{-1}\|^2\cdot\left(\|Q'_{\zeta_i}\|\cdot\|Q^{-1}\|\cdot\|F\|+2\|F'_{\zeta_i}\|\right). \tag{15}$$

Оценка $\|F\|$

Для $\|F\|$ ввиду $\|[I-\Pi_H]\|=1$ верна оценка

$$\|F\| = \left\|{H'}^\top [I-\Pi_H]\right\| \leqslant \|H'\| \doteq \eta_{01}. \tag{16}$$

Оценки $\|H\|$, $\|H_i'\|$, $\|H_i''\|$, $\|H_i'''\|$

Выберем (см. замечание 1) фундаментальную матрицу в виде

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \zeta_{m+1}^{1-N} & \dots & \zeta_n^{1-N} \\ \zeta_1 & \dots & \zeta_m & \zeta_{m+1}^{2-N} & \dots & \zeta_n^{2-N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \zeta_1^{N-1} & \dots & \zeta_m^{N-1} & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} |\zeta_i| \leqslant 1, & i=\overline{1,m}, \\ |\zeta_j| > 1, & j=\overline{m+1,n}. \end{cases} \tag{17}$$

Здесь на первых местах поставлены столбцы, образованные степенями корней характеристического многочлена, модуль которых не превосходит 1, а на старших местах — столбцы, образованные корнями с модулем >1. При таком определении модуль каждого элемента H не превосходит 1 (а значит, и модуль квадрата каждого элемента не превосходит 1), и сразу можем написать оценку

$$\|H\| \leqslant \|H\|_F = \sqrt{\|h_1\|^2 + \ldots + \|h_n\|^2} \leqslant \sqrt{nN}.$$

Доказательства последующих лемм отнесены в приложение.

Лемма 2. *Верна оценка* $\|H\| \doteq \eta_0 \leqslant \sqrt{nN}$.

Лемма 3. *Для* $H_i' = \begin{bmatrix} 0 & \dots & h_i' & \dots & 0 \end{bmatrix}$ *верна оценка* $\|H_i'\| \doteq \eta_1 < \sqrt{\frac{N^3}{3}}$. *Для нормы матрицы производных* $H' = \begin{bmatrix} h_1' & \dots & h_n' \end{bmatrix}$ *верна оценка* $\|H'\| \doteq \eta_{01} < \sqrt{n\frac{N^3}{3}}$.

Лемма 4. *Для нормы матрицы вторых производных* $H''_{\zeta_i\zeta_i} \doteq H_i''$, $i=\overline{1,n}$ *верна оценка* $\|H_i''\| \doteq \eta_2 < \sqrt{\frac{(N+1)^5}{5}}$.

Лемма 5. *Для нормы матрицы третьих производных* H_i''', $i=\overline{1,n}$ *верна оценка* $\|H_i'''\| \doteq \eta_3 < \sqrt{\frac{(N+2)^7}{7}}$.

Лемма 6. *Верна оценка*

$$\left\|\left(H^\top H\right)^{-1}\right\| \doteq \mu \leqslant \left[\frac{n^{n-1}\max_i |\zeta_i|^{N-1}}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\zeta_i-\zeta_j)}\right]^2 \leqslant \left[\frac{n^{n-1}\max_i |\zeta_i|^{N-1}}{\left\{\min_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\zeta_i-\zeta_j)\right\}^{\frac{n(n-1)}{2}}}\right]^2.$$

Оценка $\|F'_{\zeta_i}\|$

Верно равенство

$$F'_{\zeta_i} = \left(H'^{\top}\left[I - \Pi_H\right]\right)'_{\zeta_i} = H_i''^{\top}\left[I - \Pi_H\right] + H'^{\top}\left(-\Pi_H\right)'_{\zeta_i}.$$

Лемма 7. *Для нормы производной проектора* Π'_{ζ_i}, $i = \overline{1,n}$ *верна оценка*

$$\left\|\Pi'_{\zeta_i}\right\| \doteq \pi_1 \leqslant 2\mu\eta_0\eta_1\left(1 + \mu\eta_0^2\right). \tag{18}$$

С учетом лемм 3, 4, 7 и равенства $\|[I - \Pi_H]\| = 1$ имеем

$$\|F'_{\zeta_i}\| \doteq \varphi_1 \leqslant \|H_i''\| + \|H'\|\left\|\Pi'_{\zeta_i}\right\| \leqslant \eta_2 + \eta_{01}\pi_1. \tag{19}$$

Лемма 8. *Для нормы второй производной проектора* $\Pi''_{\zeta_i\zeta_j}$, $i,j = \overline{1,n}$ *верна оценка*[3]

$$\begin{aligned}\left\|\Pi''_{\zeta_i\zeta_j}\right\| &\doteq \pi_2 \leqslant 2\mu\delta_{ij}\|H_i''\|\|H\|\left(1 + \mu\|H\|^2\right)\\ &\quad + 4\mu^2\|H_i'\|^2\|H\|^2\left(1 + 2\mu\|H\|^2\right) + 2\mu\|H_i'\|^2\left(1 + 3\mu\|H\|^2\right)\\ &\quad \doteq 2\mu\delta_{ij}\eta_0\eta_2\left(1 + \mu\eta_0^2\right) + 4\mu^2\eta_0^2\eta_1^2\left(1 + 2\mu\eta_0^2\right) + 2\mu\eta_1^2\left(1 + 3\mu\eta_0^2\right).\end{aligned}$$

Вычисление $\left\|Q^{-1}\right\|$

Прямую оценку нормы обратной матрицы $\|Q^{-1}\|$ получить не удается. Есть явное выражение для матрицы Q в виде формулы, поэтому будем считать $\varkappa \doteq \|Q^{-1}\|_F$ известной константой. Выпишем выражение для Q.

$$\begin{aligned} Q &= (Fx)'_\theta = \left[F'_{\zeta_1}x \quad \ldots \quad F'_{\zeta_n}x\right],\\ F'_{\zeta_i} &= \left[H'^{\top}(I - \Pi)\right]'_{\zeta_i} = H_i''^{\top}(I - \Pi) - H'^{\top}\Pi'_{\zeta_i}, \quad \overline{i = 1, n}, \qquad (20)\\ \Pi'_{\zeta_i} &= H_i'AH^{\top} + HAH_i'^{\top} - HA\left(H_{\zeta_i}'^{\top}H + H^{\top}H'_{\zeta_i}\right)AH^{\top}, \quad A \doteq \left(H^{\top}H\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Отсюда следуют искомые значения для Q и $\|Q^{-1}\|$.

Оценка $\|\Delta Q^{-1}\|$

Изложим результат в виде леммы.

Лемма 9. *Если* Q *— невырожденная матрица,* $\varkappa \doteq \varkappa_F$ *и* $\|Q^{-1}\|\|\Delta Q\| < 1$, *то матрица* $(Q + \Delta Q)$ *невырождена и*

$$\left\|\Delta Q^{-1}\right\| \doteq \left\|(Q + \Delta Q)^{-1} - Q^{-1}\right\| \leqslant \frac{\|\Delta Q\|}{\varkappa^{-1} - \|\Delta Q\|}\varkappa.$$

Доказательство. См. приложение. □

[3] Здесь и далее $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$ — символ Кронекера.

Оценка $\|\Delta Q\|$

Верно равенство

$$\Delta Q = Q'_\theta \Delta\zeta + Q'_x \Delta x, \tag{21}$$

где производные берутся в точке $\theta + \tau\Delta\theta, x + \tau\Delta x$, $\tau \in (0,1)$.

Лемма 10. *Для нормы производной матрицы* Q'_{ζ_i}, $i \in \overline{1,n}$ *верна оценка*

$$\left\|Q'_{\zeta_i}\right\| \doteq \varkappa_1 \leqslant \|x\| \left(\eta_2\pi_1 + \eta_{01}\pi_2\right) \sqrt{(n-1) + \left[\frac{(\eta_3 + \eta_2\pi_1)}{(\eta_2\pi_1 + \eta_{01}\pi_2)} + 1\right]^2}.$$

Доказательство. См. приложение. □

Для нормы приращения Q по x используем неравенства

$$\|Q'_x\Delta x\| \leqslant \left\|Q'_{x_1}\right\| \Delta x_1 + \ldots + \left\|Q'_{x_n}\right\| \Delta x_n \leqslant \left(\left\|Q'_{x_1}\right\| + \ldots + \left\|Q'_{x_n}\right\|\right) \|\Delta x\|.$$

Производная Q'_{x_i} следует из формул (20):

$$Q'_{x_i} = \begin{bmatrix} (f_i)'_{\zeta_1} & \ldots & (f_i)'_{\zeta_n} \end{bmatrix}, \tag{22}$$

где f_i — i-й столбец матрицы F. Тогда

$$\left\|Q'_{x_i}\right\| \leqslant \left\|f'_{i\zeta_1}\right\| + \ldots + \left\|f'_{i\zeta_n}\right\|,$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \left\|Q'_{x_1}\right\| + \ldots + \left\|Q'_{x_n}\right\| \leqslant \left\|f'_{1\zeta_1}\right\| + \ldots + \left\|f'_{1\zeta_n}\right\| \\ + \ldots + \left\|f'_{n\zeta_1}\right\| + \ldots + \left\|f'_{n\zeta_n}\right\| \leqslant n^2 \max_i \left\|F'_{\zeta_i}\right\| \doteq n^2\varphi_1. \end{aligned}$$

Оценим норму приращения $\Delta Q(\Delta\theta)$.

$$\|\Delta Q(\Delta\theta)\| \leqslant \max_{\theta\in[\theta,\theta+\Delta\theta]} \|Q'_\theta\Delta\theta\| \leqslant \left(\left\|Q'_{\zeta_1}\right\| + \ldots + \left\|Q'_{\zeta_n}\right\|\right) \|\Delta\theta\|.$$

$$Q'_{\zeta_i} = \begin{bmatrix} F''_{\zeta_1\zeta_i}x & \ldots & F''_{\zeta_n\zeta_i}x \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} (Fx)''_{\zeta_i\zeta_j} =& \delta_{ij} H_i'''^\top [I - \Pi]\, x + H_i''^\top (-\Pi)'_{\zeta_j} x \\ &+ \delta_{ij} H_i''^\top (-\Pi)'_{\zeta_i} x + H'^\top (-\Pi)''_{\zeta_i\zeta_j} x \end{aligned}$$

(см. (48)).

Следствие 2. *Верны оценки* $\|Q'_\theta \Delta\theta\| \leqslant n\varkappa_1 \|\Delta\theta\|$, $\|Q'_x \Delta x\| \leqslant n^2\varphi_1 \|\Delta x\|$.

Доказательство. Следует из формулы (22) и леммы 10. □

Следствие 3. *Верна оценка*

$$\|\Delta Q\| \leqslant n\varkappa_1 \|\Delta\theta\| + n^2\varphi_1 \|\Delta x\|. \tag{23}$$

Доказательство. См. (21). □

Условие леммы 9 ($\|Q^{-1}\|\,\|\Delta Q\| < 1$) заменим на более сильное неравенство

$$\|\Delta Q\| < \varkappa^{-1} < \frac{1}{\|Q^{-1}\|}.$$

Ввиду следствия 3 верно

$$\|\Delta Q\| \leqslant n\varkappa_1 \|\Delta\theta\| + n^2\varphi_1 \|\Delta x\| < \varkappa^{-1}.$$

Всегда нужно проверять это условие. Если оно выполнено, то по лемме 9

$$\left\|\Delta Q^{-1}\right\| \doteq \left\|(Q+\Delta Q)^{-1} - Q^{-1}\right\| \leqslant \frac{\|\Delta Q\|}{\varkappa^{-1} - \|\Delta Q\|}\varkappa$$

и

$$\left\|Q^{-1}\right\| \leqslant \left\|Q_*^{-1}\right\| + \left\|\Delta Q^{-1}\right\| \leqslant \left(1 + \frac{\|\Delta Q\|}{\varkappa^{-1} - \|\Delta Q\|}\right)\varkappa = \frac{1}{\varkappa^{-1} - \|\Delta Q\|}. \tag{24}$$

Остается оценить $\|\Delta Q\|$ через $\|\Delta x\|$. Используем (23).

Оценка $\|\Delta\theta\|$

Применяя (24), (16) и теорему 3, получим

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \left\|Q^{-1}\right\| \|F\| \|\Delta x\| \leqslant \frac{\eta_{01}}{\varkappa^{-1} - \|\Delta Q\|} \|\Delta x\| \leqslant \frac{\eta_{01}}{\varkappa^{-1} - \|\Delta Q\|_{\max}} \|\Delta x\|, \tag{25}$$

$$\|\Delta Q\|_{\max} < \varkappa^{-1}, \tag{26}$$

где $\|\Delta Q\|_{\max}$ — оценка сверху для $\|\Delta Q\|$. Неравенство (26) имеет технический характер.

Заметим, что это грубая оценка по области, ср. с неулучшаемой оценкой в точке:

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \left\|Q^{-1}\right\| \|F\| \|\Delta x\| \leqslant \varkappa\eta_{01} \|\Delta x\|.$$

Оценка $\|\Delta Q\|$ (продолжение)

Ввиду (23) и (25) верны неравенства

$$\|\Delta Q\| \leqslant \|\Delta Q\|_{\max} \leqslant n\varkappa_1 \|\Delta\theta\| + n^2\varphi_1 \|\Delta x\| \\ \leqslant \left(\frac{\varkappa_1\eta_{01}}{\varkappa^{-1} - \|\Delta Q\|_{\max}} + n\varphi_1\right) n \|\Delta x\| .$$

Здесь $\|\Delta Q\|_{\max}$ играет роль параметра в наших оценках и не имеет прямой связи с точной верхней границей значений $\|\Delta Q\|$, кроме неравенства $\|\Delta Q\| \leqslant \|\Delta Q\|_{\max}$. Вместе с (26) получаем систему условий на $\|\Delta Q\|_{\max}$ и ε:

$$\|\Delta Q\|_{\max} \leqslant \left(\frac{\varkappa_1\eta_{01}}{\varkappa^{-1} - \|\Delta Q\|_{\max}} + n\varphi_1\right) n\varepsilon < \varkappa^{-1}. \tag{27}$$

Решение неравенства включает в себя точку $\|\Delta Q\|_{\max} = 0$. При увеличении $\|\Delta Q\|_{\max}$ левая часть неравенства растет от нуля, а правая растет от константы, которая, как и скорость роста правой части, зависит от ε. При малых ε левая часть при некотором $\|\Delta Q\|_{\max}$ сравнивается с правой частью; поэтому нас интересует наименьшее положительное решение уравнения

$$\|\Delta Q\|_{\max} = \left(\frac{\varkappa_1\eta_{01}}{\varkappa^{-1} - \|\Delta Q\|_{\max}} + n\varphi_1\right) n\varepsilon \tag{28}$$

(если оно существует) в зависимости от ε. Если решения не существует, то не удается получить верхней оценки для $\|\Delta Q\|_{\max}$, кроме (26), но этот случай не является содержательным ввиду (31) далее. Наша задача — получить условие на верхнюю границу для ε, при которой неравенства (27) дают более содержательную оценку, чем $\|\Delta Q\|_{\max} < \varkappa^{-1}$.

Введем обозначения

$$\alpha \doteq n\varkappa_1\eta_{01}, \quad \beta \doteq \varkappa^{-1}, \quad \gamma \doteq n^2\varphi_1, \quad y \doteq \|\Delta Q\|_{\max}. \tag{29}$$

Лемма 11. *Уравнение* (28) *с учетом ограничения* (27)
1) *разрешимо при* ε *только таких, что*

$$\varepsilon < \varepsilon_1 \doteq \frac{\beta}{\gamma}\left(\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 1}\right), \quad \varphi \doteq 2\frac{\alpha}{\beta\gamma} + 1, \tag{30}$$

2) *при этом*

$$y(\varepsilon) = \frac{(\beta + \gamma\varepsilon)}{2} - \sqrt{\frac{(\beta + \gamma\varepsilon)^2}{4} - (\alpha + \beta\gamma)\,\varepsilon}$$

монотонно растет от 0 *до* $y(\varepsilon_1)=\frac{(\beta+\gamma\varepsilon_1)}{2}$, *значит,* $y(\varepsilon)<y(\varepsilon_1)$;
3) $y(\varepsilon_1)<\beta\left(1-\frac{\alpha}{\beta\gamma\varphi}\right)$, *то есть на интервале* $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_1$ *функция* $y(\varepsilon)$ *является оценкой сверху для* $\|\Delta Q\|_{\max}$ *лучшей, чем* (26).

Доказательство. См. приложение. □

Замечание. В условии леммы 11 неравенство (30) играет роль технического верхнего ограничения на ε, при котором удается получить содержательную оценку для $\|\Delta Q\|_{\max}$.

Далее возвращаемся к (15):

$$\begin{aligned}\left\|(\zeta_i)''_{xx}\right\| &\leqslant \sqrt{n}\|F\|\cdot\|Q^{-1}\|^2\cdot\left(\|Q'_{\zeta_i}\|\cdot\|Q^{-1}\|\cdot\|F\|+2\|F'_{\zeta_i}\|\right)\\ &\leqslant \frac{\sqrt{n}\eta_{01}}{\left(\varkappa^{-1}-\|\Delta Q\|\right)^2}\cdot\left(\frac{\varkappa_1\eta_{01}}{\left(\varkappa^{-1}-\|\Delta Q\|\right)}+2\varphi_1\right).\end{aligned}\tag{31}$$

Следовательно, оценка нормы остатка r_i (14) имеет вид

$$\begin{aligned}\|r_i\| &\doteq \left\|\frac{1}{2}\Delta x^\top\left(\zeta_i\right)''_{xx}\Delta x\right\|\\ &\leqslant \frac{\sqrt{n}\eta_{01}}{2\left[\varkappa^{-1}-y(\varepsilon_1)\right]^2}\cdot\left(\frac{\varkappa_1\eta_{01}}{\left[\varkappa^{-1}-y(\varepsilon_1)\right]}+2\varphi_1\right)\varepsilon^2\\ &\leqslant \frac{\sqrt{n}\eta_{01}}{2\left[\varkappa^{-1}-\beta\left(1-\frac{\alpha}{\beta\gamma\varphi}\right)\right]^2}\cdot\left(\frac{\varkappa_1\eta_{01}}{\left[\varkappa^{-1}-\beta\left(1-\frac{\alpha}{\beta\gamma\varphi}\right)\right]}+2\varphi_1\right)\varepsilon^2\\ &= \frac{\sqrt{n}\eta_{01}}{2\left(\frac{\alpha}{\gamma\varphi}\right)^2}\cdot\left(\frac{\varkappa_1\eta_{01}}{\left(\frac{\alpha}{\gamma\varphi}\right)}+2\varphi_1\right)\varepsilon^2\doteq c_2\varepsilon^2.\end{aligned}\tag{32}$$

§ 7. Расчеты области $B(x)$ приближенной линейности $\Delta\theta(\Delta x)$ в примере К. Ланцоша

Область $B(x)$ (7) определяется условием малости нормы остаточного члена (32) по сравнению со значением нормы приращения первого порядка (25)

$$\|\Delta\zeta\|=\left\|Q^{-1}F\Delta x\right\|\leqslant\frac{\eta_{01}}{\varkappa^{-1}-\|\Delta Q\|_{\max}}\varepsilon,\quad \varepsilon=\varepsilon_x\|x\|.$$

Приведем результаты расчетов для примера К. Ланцоша [3, IV.§23]. Процесс

$$y(t)=0.0951\,\mathrm{e}^{-t}+0.8607\,\mathrm{e}^{-3t}+1.5576\,\mathrm{e}^{-5t}\tag{33}$$

описывается уравнением $y''' + 9y'' + 23y' + 15y = 0$, $n = 3$. Дискретизация по времени с шагом 0.05 приводит к разностному уравнению

$$y_{k+3} - 2.5907 \cdot y_{k+2} + 2.2298 \cdot y_{k+1} - 0.6376 \cdot y_k = 0, \quad k = \overline{1, 21},$$

с корнями характеристического многочлена

$$\zeta_1 = 0.9512, \quad \zeta_2 = 0.8607, \quad \zeta_3 = 0.7788.$$

При округлении y в третьем разряде получены «данные наблюдений»

$$x = \big[2.51;\ \ 2.04;\ \ 1.67;\ \ 1.37;\ \ 1.12;\ \ 0.93;\ \ 0.77;\ \ 0.64;\\ 0.53;\ \ 0.45;\ \ 0.38;\ \ 0.32;\ \ 0.27;\ \ 0.23;\ \ 0.20;\ \ 0.17;\\ 0.15;\ \ 0.13;\ \ 0.11;\ \ 0.10;\ \ 0.09;\ \ 0.08;\ \ 0.07;\ \ 0.06\big]\,, \quad N = 24.$$

Задача состоит в оценке параметра $\theta = [\zeta_1; \zeta_2; \zeta_3]$ по данным x . К. Ланцош показал [3, IV.§23], что решения этой задачи не существует, а получаемые разными способами ответы бессмысленны. Проблема была исследована в [16], где было показано, что в задаче К. Ланцоша для оценки параметра с погрешностью $\|\Delta\theta\|/\|\theta\| = 0.1$ нужны данные x с относительной погрешностью не более 10^{-5} , если считать отображение $\theta(x)$ близким к линейному.

Вопрос о теоретическом доказательстве близости зависимости $\theta(x)$ к линейной при практических возмущениях остается открытым, судя по приводимым ниже расчетам.

При этом численное моделирование показывает, что реальный разброс решений задачи Прони с разными целевыми функциями близок к значениям, полученным исходя из предположения о линейности $\theta(x)$, вплоть до значений $\varepsilon_x \simeq 0.1 \div 0.3$ [16, 18, 19].

1. Сопоставим полученные верхние границы для приращений $\Delta\theta$ первого и второго порядка малости, исходя из соотношения, например, $\varepsilon_{21} = 0.1$ (см. (7), (32)):

$$0.1\, \frac{\eta_{01}}{\varkappa^{-1} - \|\Delta Q\|_{\max}} \varepsilon \geqslant c_2 \varepsilon^2.$$

Отсюда следует ограничение на уровень возмущений

$$\varepsilon \leqslant 0.1\, \frac{\eta_{01}}{c_2 \left(\varkappa^{-1} - \beta\left(1 - \frac{\alpha}{\beta\gamma\varphi}\right)\right)} = 0.1 \frac{\eta_{01}}{c_2 \frac{\alpha}{\gamma\varphi}}.$$

Для примера К. Ланцоша расчет дает $\varepsilon \lesssim 10^{-21}$.

2. Расчитаем предельную величину возмущений исходя из точного значения для линейного слагаемого и верхней оценки для квадратичного:

$$\varepsilon \leqslant 0.1\,\frac{\|Q^{-1}F\|}{c_2}.$$

Для примера К. Ланцоша получим $\varepsilon \lesssim 10^{-25}$.

3. Вычислим область допустимых возмущений ε в данных, исходя из предположения о постоянстве матриц первых и вторых производных в окрестности истинной точки (это будет верхняя неулучшаемая оценка для ε), вычисляя точные значения для линейного и квадратичного слагаемых. Используем следующие формулы (в порядке вычисления).

$$\begin{aligned}
\Pi'_{\zeta_i} =& H'_i \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top + H \left(H^\top H\right)^{-1} H'^\top_i \\
&- H \left(H^\top H\right)^{-1} \left(H'^\top_i H + H^\top H'_i\right) \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top \\
&\doteq B_i + B_i^\top - B_i^\top \Pi - \Pi B_i = (I-\Pi)\,B_i + B_i^\top\,(I-\Pi)\,, \\
B_i \doteq& H'_i \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top, \\
F'_{\zeta_i} =& H''^\top_i\,[I-\Pi] + H'^\top\,[-\Pi]'_{\zeta_i}\,, \\
\Pi''_{\zeta_i\zeta_j} =& \left[(I-\Pi)\,B_i + B_i^\top\,(I-\Pi)\right]'_{\zeta_j} \doteq C_{ij} + C_{ij}^\top, \\
C_{ij} \doteq& \left[(I-\Pi)\,B_i\right]'_{\zeta_j} = [-\Pi]'_{\zeta_j}\,B_i + (I-\Pi)\,[B_i]'_{\zeta_j}\,, \\
[B_i]'_{\zeta_j} =& \delta_{ij} H''_j \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top + H'_i \left(H^\top H\right)^{-1} H'^\top_j \\
&- H'_i \left(H^\top H\right)^{-1} \left(H'^\top_j H + H^\top H'_j\right) \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top, \\
F''_{\zeta_i\zeta_j} =& \delta_{ij} H'''^\top_i\,[I-\Pi] + H''^\top_i\,[-\Pi]'_{\zeta_j} \\
&+ \delta_{ij} H''^\top_i\,[-\Pi]'_{\zeta_i} + H'^\top\,[-\Pi]''_{\zeta_i\zeta_j}\,, \\
Q'_{\zeta_i} =& \left[F''_{\zeta_1\zeta_i} x \quad \dots \quad F''_{\zeta_n\zeta_i} x\right],
\end{aligned}$$

$$(\zeta_k)''_{xx} = -F^\top Q^{-\top} \begin{bmatrix} e_k^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_1} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_1}\right) \\ \vdots \\ e_k^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_n} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_n}\right) \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Нормы матриц вторых производных $\left\|(\zeta_k)''_{xx}\right\|$, $k = \overline{1,3}$, $x = y$ в примере Ланцоша лежат в интервале $(1 \div 5)\cdot 10^9$. Норма матрицы первых производных приближенно равна $\|Q^{-1}F\| \simeq 200$. Из соотношения

$$0.1 \cdot 200\,\varepsilon \simeq 2\cdot 10^9\,\varepsilon^2$$

следует приближенное неравенство $\varepsilon \lesssim 10^{-8}$, при выполнении которого квадратичное приращение $\Delta_2\theta$ по норме на порядок меньше линейного приращения $\Delta\theta$.

§ 8. Оценки сверху для приращений $\|\Delta\theta\|$ по неравенству Уилкинсона

Неравенство Уилкинсона [20, с. 180] имеет вид

$$\varepsilon_\theta \leqslant \frac{\varrho}{1-\varrho\varepsilon_A}\varepsilon_A + \varrho\varepsilon_b.$$

Это неравенство описывает соотношение между относительными возмущениями

$$\varepsilon_\theta \doteq \frac{\|\Delta\theta\|}{\|\theta\|}, \quad \varepsilon_A \doteq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \quad \varepsilon_b \doteq \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

в линейном уравнении

$$(A+\Delta A)\,(\theta+\Delta\theta) \;=\; b+\Delta b$$

с квадратной неособенной матрицей A с числом обусловленности

$$\varrho(A) \doteq \|A\|\,\|A^{-1}\|\,.$$

Для получения интересующей нас оценки $\|\Delta\theta\|$ с помощью этого неравенства переформулируем задачу.

Разностное уравнение (1) запишем в матричном виде (39)

$$\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n & y_{n+1} \\ y_2 & \cdots & y_{n+1} & y_{n+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_{N-n} & \cdots & y_{N-1} & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$V_1(y)\alpha = -v(y), \quad V_1(y) \doteq \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_{N-n} & \cdots & y_{N-1} \end{bmatrix}, \quad v(y) \doteq \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}.$$

Заметим, что векторы α и θ связаны нелинейным взаимно-однозначным преобразованием через формулы Виета.

Пусть x — наблюдение, Δx — возмущение,

$$\hat{x} = \Pi(\hat{\alpha})x, \quad \hat{x}+\Delta\hat{x} = \Pi(\hat{\alpha}+\Delta\hat{\alpha})\,(x+\Delta x)$$

— аппроксимации для x и $x+\Delta x$. Верны равенства

$$\hat{V}_1\hat{\alpha} = -\hat{v}, \quad \left(\hat{V}_1 + \Delta\hat{V}_1\right)(\hat{\alpha}+\Delta\hat{\alpha}) = -\left(\hat{v}+\Delta\hat{v}\right), \tag{34}$$

где $\hat{V}_1 \doteq V_1(\hat{x})$, $\hat{v} \doteq v(\hat{x})$. Обозначим $V \doteq [V_1, v]$.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 96-138
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 96-138

Теорема 5. *Верны оценки*

$$\|\Delta\hat\alpha\| \leqslant \rho\cdot\|\Delta\hat V\|\cdot\frac{\|\hat\alpha\|+1}{1-\rho\cdot\|\Delta\hat V\|},\quad \rho \doteq \lambda_{\min}^{-1/2}\left(\hat V_1^\top \hat V_1\right),$$

$$\varepsilon_{\hat\alpha} \leqslant \overline{\rho}\varepsilon_x\cdot\frac{1+1/\|\hat\alpha\|}{1-\overline{\rho}\varepsilon_x},\quad \overline{\rho} = \lambda_{\min}^{-1/2}\left(\frac{\hat V_1}{\|\hat V\|}^\top\frac{\hat V_1}{\|\hat V\|}\right),$$

где $\varepsilon_{\hat\alpha} \doteq \frac{\|\Delta\hat\alpha\|}{\|\hat\alpha\|}$, $\varepsilon_x \doteq \frac{\|\Delta\hat V\|}{\|\hat V\|}$ *— относительные погрешности в коэффициентах и в наблюдениях.*

Доказательство. См. приложение. □

Расчеты по неравенствам из теоремы 5 для примера К. Ланцоша сведены в таблицу.

ε_x	$\varepsilon_{\hat\alpha}$МНК	$\varepsilon_{\hat\alpha}$ВП	$\overline{\rho}\varepsilon_x$	$\varepsilon_{\hat\alpha}$Wilk
10^{-7}	$5\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-5}$	$6\cdot10^{-3}$	$8\cdot10^{-3}$
10^{-6}	$5\cdot10^{-3}$	$6\cdot10^{-4}$	0.07	0.1
10^{-5}	0.05	$6\cdot10^{-3}$	0.6	2.7
10^{-4}	0.5	0.06	>1	$*$

В первом столбце показан относительный уровень возмущений, добавляемых к точному решению y (33) для моделирования наблюдений x. Во втором и третьем столбцах приведены оценки погрешностей $\varepsilon_{\hat\alpha}$ решений задачи Прони с целевыми функциями МНК и вариационной. В предпоследнем и последнем столбцах приведены величины из неравенств теоремы 5. Реальные погрешности при моделировании со случайными погрешностями оказываются близкими к значениям из второго и третьего столбца таблицы [16].

Из таблицы можно заключить, что верхние оценки по неравенству Уилкинсона на несколько порядков грубее, чем оценки, получаемые из теорем о приращениях неявных функций $\alpha(x),\theta(x)$.

Оценки для величины ε_θ относительного разброса корней в примере К. Ланцоша получаются из соотношения $\varepsilon_\theta \simeq 580\cdot\varepsilon_{\hat\alpha}$, где коэффициент пропорциональности рассчитан исходя из соотношения $\Delta\alpha \simeq \Phi\Delta\theta$, где Φ — якобиан отображения из пространства корней в пространство коэффициентов характеристического многочлена.

§ 9. Приложение

Обозначим δH «частное приращение» при малом изменении указанных аргументов:

$$\delta H(\delta\zeta_{i_1},\dots,\delta\zeta_{i_m}) \doteq \delta H(\delta\theta) \doteq \frac{\partial H}{\partial\zeta_{i_1}}\delta\zeta_{i_1}+\dots+\frac{\partial H}{\partial\zeta_{i_m}}\delta\zeta_{i_m}.$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 96-138
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 96-138

Доказательство теоремы 1. Целевую функцию (4) запишем в виде

$$J = (x - Hc)^\top (x - Hc) \doteq J(\theta, c).$$

Критические точки определяются системой уравнений

$$J'_\theta = 0, \quad J'_c = 0.$$

Из второго уравнения следует

$$c = \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top x. \tag{35}$$

Из первого уравнения

$$J'_\theta = 2\,(x - Hc)^\top (x - Hc)'_\theta = -2\,(x - Hc)^\top H'_\theta c = 0.$$

Рассмотрим приращение $\delta J(\delta\theta)$:

$$\delta J = -2\,(x - Hc)^\top (\delta H)\, c. \tag{36}$$

Будем искать выражение для приращения в виде $\delta J \doteq g^\top \delta\theta$, тогда строка $g^\top$ будет искомой частной производной J'_θ .

Имеем

$$\begin{aligned}\delta H \doteq \delta H(\delta\zeta_1, \dots, \delta\zeta_n) = \begin{bmatrix}\delta h_1 & \dots & \delta h_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h'_1\delta\zeta_1 & \dots & h'_n\delta\zeta_n\end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix}h'_1 & \dots & h'_n\end{bmatrix} \operatorname{diag}\left[\delta\zeta_1, \dots, \delta\zeta_n\right] \doteq H'\, D_{\delta\theta}.\end{aligned}$$

Отметим соотношение, вытекающее из определения диагональных матриц $D_{\delta\theta}, D_c$:

$$D_{\delta\theta} c = D_c \delta\theta. \tag{37}$$

Из (36) и (37) получаем

$$(\delta H)\, c = H' D_{\delta\theta} c = H' D_c \delta\theta,$$

$$\delta J = -2\,(x - Hc)^\top H' D_c \delta\theta,$$

откуда

$$J'_\theta = -2\,(x - Hc)^\top H' D_c.$$

Подставим c (35):

$$J'_\theta = -2x^\top \left(I - H\left(H^\top H\right)^{-1} H^\top\right) H' D_c \doteq x^\top (I - \Pi)\, H' D_c. \tag{38}$$

С учетом полноты $\det D_c \neq 0$ условие экстремума $J'_\theta = 0$ равносильно уравнению

$$\underbrace{H'^\top (I - \Pi)}_{F(\theta)} x = 0.$$

Теорема доказана.

Доказательство предложения 2. Параметр $\theta = [\zeta_1; \ldots ; \zeta_n]$ взаимно-однозначно связан с коэффициентами характеристического многочлена $\alpha(\zeta) = (\zeta - \zeta_1) \ldots (\zeta - \zeta_n)$ (2). При чистых наблюдениях x вариационная задача Прони сводится к классической [1], решаемой через составление системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов многочлена $\alpha(\zeta)$:

$$\begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n & x_{n+1} \\ x_2 & \ldots & x_{n+1} & x_{n+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{N-n} & \ldots & x_{N-1} & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Однозначная разрешимость этой системы уравнений равносильна линейной независимости столбцов подматрицы $V_1 \doteq \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N-n} & \ldots & x_{N-1} \end{bmatrix}$. В свою очередь, последнее условие равносильно отсутствию решения $\overline{\alpha} \neq 0$ у системы уравнений

$$\begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N-n} & \ldots & x_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\alpha}_0 \\ \vdots \\ \overline{\alpha}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

которая равносильна системе (1) с коэффициентами $\overline{\alpha}$ и имеет порядок $m = n - 1 < n$. Мы получили, что параметр θ однозначно вычисляется по чистым данным x тогда и только тогда, когда данные x не являются решением некоторого уравнения вида (1) меньшего порядка $m < n$, т. е. полны. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 2. Ввиду уравнения $F(\theta)x = 0$ допустимые малые приращения $d\theta, dx$ связаны условием

$$d\,[Fx] = dF \cdot x + F dx = 0.$$

С учетом определения (10)

$$Fx = H'^{\top} (I - \Pi)\, x = H'^{\top} (x - \hat{x})$$

получаем

$$d\,[Fx] = d\left[H'^{\top} (x - \hat{x})\right] = d\left[H'^{\top} x\right] - d\left[H'^{\top} \hat{x}\right] = 0.$$

Отсюда следует

$$H'^{\top} dx + dH'^{\top} \cdot x = H'^{\top} d\,(\Pi x) + dH'^{\top} \cdot \Pi x.$$

Подставим в это равенство $d\,(\Pi x) = d\hat{x} = dH \cdot c + Hdc$, получим

$$H'^{\top} dx + dH'^{\top} \cdot x = H'^{\top} \left(dH \cdot c + Hdc \right) + dH'^{\top} \cdot \Pi x,$$

или

$$H'^{\top} dx + dH'^{\top} \cdot (I - \Pi)\, x = H'^{\top} \left(dH \cdot c + Hdc \right).$$

Учтем соотношения $dH = H' D_{d\theta}$, $dH' = H'' D_{d\theta}$ и перенесем слагаемые с $d\theta$ в левую часть:

$$H'^{\top} H' D_{d\theta} c - D_{d\theta} H''^{\top} (I - \Pi)\, x = H'^{\top} \left(dx - Hdc \right).$$

Обозначим $p \doteq H''^{\top} (I - \Pi)\, x = H''^{\top} (x - \hat{x})$. Получили систему уравнений на $d\theta$

$$\left(H'^{\top} H' D_c - D_p \right) d\theta = H'^{\top} \left(dx - Hdc \right).$$

Однозначная разрешимость этой системы уравнений относительно $d\theta$ равносильна невырожденности матрицы $\left(H'^{\top} H' D_c - D_p \right)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Из рассуждений раздела следует выражение для $d\theta / dx$. Далее следуем схеме доказательства [2, лемма 1].

$$\frac{d^2\theta}{dx_j dx_k} = \frac{d}{dx_j} \left(-Q^{-1} f_k \right) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-Q^{-1} f_k \right)}_{(1)} \underbrace{\frac{d\theta}{dx_j}}_{-Q^{-1} f_j} + Q^{-1} Q'_{x_j} Q^{-1} f_k - \underbrace{Q^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} f_k}_{=0}.$$

Распишем сомножитель (1):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-Q^{-1} f_k \right) = Q^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} Q \right) Q^{-1} f_k - Q^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} f_k \doteq Q^{-1} \begin{bmatrix} a_{1,k} & \dots & a_{n,k} \end{bmatrix},$$

$$a_{i,k} \doteq \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} Q \right) Q^{-1} f_k - \frac{\partial}{\partial \theta} f_k \right]_i = Q'_{\zeta_i} Q^{-1} f_k - (f_k)'_{\zeta_i}.$$

В результате имеем

$$\frac{d^2\theta}{dx_j dx_k} = -Q^{-1} \begin{bmatrix} a_{1,k} & \dots & a_{n,k} \end{bmatrix} Q^{-1} f_j + Q^{-1} Q'_{x_j} Q^{-1} f_k, \tag{40}$$

что доказывает теорему.

Возможность перестановки индексов j, k в правой части формулы 40 не очевидна, хотя является необходимым условием для проверки утверждения теоремы.

Утверждение 1. Правая часть формулы 40 инвариантна относительно перестановки индексов j, k.

Доказательство. Нужно установить равенство

$$-A_k Q^{-1} f_j + Q'_{x_j} Q^{-1} f_k = -A_j Q^{-1} f_k + Q'_{x_k} Q^{-1} f_j.$$

Здесь $A_k = \left[Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k - (f_k)'_{\zeta_1} \quad \dots \quad Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k - (f_k)'_{\zeta_n}\right]$. В левой части имеем

$$\begin{aligned} &- A_k Q^{-1} f_j + Q'_{x_j} Q^{-1} f_k \\ &\quad = -\left[Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k - (f_k)'_{\zeta_1} \quad \dots \quad Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k - (f_k)'_{\zeta_n}\right] Q^{-1} f_j + Q'_{x_j} Q^{-1} f_k \\ &\quad = -\left[Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k \quad \dots \quad Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k\right] Q^{-1} f_j + \left[(f_k)'_{\zeta_1} \quad \dots \quad (f_k)'_{\zeta_n}\right] Q^{-1} f_j \\ &\qquad + Q'_{x_j} Q^{-1} f_k. \qquad (41) \end{aligned}$$

По определению $Q \doteq (Fx)'_\theta$, тогда $Q'_{x_k} = (f_k)'_\theta = \left[(f_k)'_{\zeta_1} \quad \dots \quad (f_k)'_{\zeta_n}\right]$ (см. (46)) и правую часть (41) можно записать в виде

$$-\left[Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k \quad \dots \quad Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k\right] Q^{-1} f_j + Q'_{x_k} Q^{-1} f_j + Q'_{x_j} Q^{-1} f_k.$$

Последние два слагаемых очевидно меняются местами при перестановке индексов j, k, поэтому остается проверить равенство

$$\left[Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k \quad \dots \quad Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k\right] Q^{-1} f_j = \left[Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_j \quad \dots \quad Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_j\right] Q^{-1} f_k.$$

В обеих частях равенства стоят векторы из n компонент. Проверим для произвольной i-й компоненты.

$$\begin{aligned} e_i^\top &\left[Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k \quad \dots \quad Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k\right] Q^{-1} f_j \\ &= \left[e_i^\top Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k \quad \dots \quad e_i^\top Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k\right] Q^{-1} f_j \\ &= f_k^\top Q^{-\top} \left[Q'^\top_{\zeta_1} e_i \quad \dots \quad Q'^\top_{\zeta_n} e_i\right] Q^{-1} f_j. \end{aligned}$$

Ввиду полученного выражения достаточно доказать симметричность матрицы

$$\left[Q'^\top_{\zeta_1} e_i \quad \dots \quad Q'^\top_{\zeta_n} e_i\right] = \left[Q'^\top_{\zeta_1} e_i \quad \dots \quad Q'^\top_{\zeta_n} e_i\right]^\top = \begin{bmatrix} e_i^\top Q'_{\zeta_1} \\ \vdots \\ e_i^\top Q'_{\zeta_n} \end{bmatrix}.$$

Обозначим $Q'_{\zeta_k} \doteq \left[r_{k1} \quad \dots \quad r_{kn}\right]$. Тогда последнее равенство запишется в виде

$$\begin{bmatrix} r_{11}^\top e_i & \dots & r_{n1}^\top e_i \\ \vdots & & \vdots \\ r_{1n}^\top e_i & \dots & r_{nn}^\top e_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_i^\top r_{11} & \dots & e_i^\top r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ e_i^\top r_{n1} & \dots & e_i^\top r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Все элементы в этих матрицах суть скаляры, поэтому каждый элемент в матрице слева можем транспонировать. Получим равенство

$$\begin{bmatrix} e_i^\top r_{11} & \dots & e_i^\top r_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ e_i^\top r_{1n} & \dots & e_i^\top r_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_i^\top r_{11} & \dots & e_i^\top r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ e_i^\top r_{n1} & \dots & e_i^\top r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, вопрос свелся к проверке симметричности $r_{kj} = r_{jk}$. Согласно определению

$$\begin{bmatrix} r_{k1} & \dots & r_{kn} \end{bmatrix} \doteq Q'_{\zeta_k} = \left[(Fx)'_\theta\right]'_{\zeta_k} = \begin{bmatrix} F'_{\zeta_1}x & \dots & F'_{\zeta_n}x \end{bmatrix}'_{\zeta_k}.$$

Тогда $r_{kj} = \left[F'_{\zeta_j}x\right]'_{\zeta_k} = F''_{\zeta_j\zeta_k}x = F''_{\zeta_k\zeta_j}x = r_{jk}$, что означает истинность доказываемого утверждения. □

Доказательство предложения 3. Применим формулу приращений (13) к случаю $f = \theta(x)$. Имеем $f'_\theta = \theta(x)'_\theta = 0$ (производная частная); тогда $d\theta = \theta'_x dx$. Из формулы для приращения дифференциала имеем

$$d^2\zeta = (d\theta)'_\theta\, d\theta + (d\theta)'_x\, dx = (\theta'_x dx)'_\theta\, d\theta + (\theta'_x dx)'_x\, dx.$$

Используем равенство $\theta'_x = -Q^{-1}F$ (теорема 3):

$$\begin{aligned} d^2\theta &= \left(-Q^{-1}Fdx\right)'_\theta d\theta + \left(-Q^{-1}Fdx\right)'_x dx \\ &= \left(-Q^{-1}Fdx\right)'_{\zeta_1} d\zeta_1 + \ldots + \left(-Q^{-1}Fdx\right)'_{\zeta_n} d\zeta_n \\ &\quad + \left(-Q^{-1}Fdx\right)'_{x_1} dx_1 + \ldots + \left(-Q^{-1}Fdx\right)'_{x_N} dx_N. \end{aligned}$$

Вынесем dx:

$$\begin{aligned} d^2\theta &= \left(-Q^{-1}F\right)'_{\zeta_1} d\zeta_1 dx + \ldots + \left(-Q^{-1}F\right)'_{\zeta_n} d\zeta_n dx \\ &\quad + \left(-Q^{-1}F\right)'_{x_1} dx_1 dx + \ldots + \left(-Q^{-1}F\right)'_{x_N} dx_N dx. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения

$$F'_{x_i} = 0, \quad \left(-Q^{-1}\right)'_{\zeta_i} = Q^{-1}Q'_{\zeta_i}Q^{-1}, \quad \left(-Q^{-1}\right)'_{x_i} = Q^{-1}Q'_{x_i}Q^{-1},$$

получим

$$\begin{aligned} d^2\theta &= \left(Q^{-1}Q'_{\zeta_1}Q^{-1}F - Q^{-1}F'_{\zeta_1}\right) d\zeta_1 dx + \ldots + \left(Q^{-1}Q'_{\zeta_n}Q^{-1}F - Q^{-1}F'_{\zeta_n}\right) d\zeta_n dx \\ &\quad + Q^{-1}Q'_{x_1}Q^{-1}F dx_1 dx + \ldots + Q^{-1}Q'_{x_N}Q^{-1}F dx_N dx. \end{aligned}$$

Умножим обе части равенства слева на Q:

$$
\begin{aligned}
Qd^2\theta = \left(Q'_{\zeta_1}Q^{-1}F - F'_{\zeta_1}\right)d\zeta_1 dx + \ldots + \left(Q'_{\zeta_n}Q^{-1}F - F'_{\zeta_n}\right)d\zeta_n dx \\
+ Q'_{x_1}Q^{-1}F dx_1 dx + \ldots + Q'_{x_N}Q^{-1}F dx_N dx.
\end{aligned}
$$

Ввиду равенства $-Q^{-1}Fdx = d\theta$ можем написать

$$
\begin{aligned}
-Qd^2\theta = \left(Q'_{\zeta_1}d\theta + F'_{\zeta_1}dx\right)d\zeta_1 + \ldots + \left(Q'_{\zeta_n}d\theta + F'_{\zeta_n}dx\right)d\zeta_n \\
+ Q'_{x_1}dx_1 d\theta + \ldots + Q'_{x_N}dx_N d\theta.
\end{aligned}
$$

После перегруппировки слагаемых получим

$$
\begin{aligned}
-Qd^2\theta &= \left(Q'_{\zeta_1}d\zeta_1 + \ldots + Q'_{\zeta_n}d\zeta_n\right)d\theta \\
&+ \ldots + \left(F'_{\zeta_1}d\zeta_1 + \ldots + F'_{\zeta_n}d\zeta_n\right)dx \\
&+ \left(Q'_{x_1}dx_1 + \ldots + Q'_{x_N}dx_N\right)d\theta.
\end{aligned}
$$

Или кратко

$$
-Qd^2\theta = \left[\delta Q(d\theta) + \delta Q(dx)\right]d\theta + \delta F(d\theta)\cdot dx. \tag{42}
$$

Имеет место следующее

Утверждение 2. Для $Q = (Fx)'_\theta$ верно равенство $\delta Q(dx)\cdot d\theta = \delta F(d\theta)\cdot dx$. Здесь $\delta Q(dx) \doteq Q'_{x_1}dx_1 + \ldots + Q'_{x_N}dx_N$, $\delta F(d\theta) \doteq F'_{\zeta_1}d\zeta_1 + \ldots + F'_{\zeta_n}d\zeta_n$.

Доказательство. Имеем $\delta Q(dx)\cdot d\theta = \left(Q'_{x_1}dx_1 + \ldots + Q'_{x_N}dx_N\right)\cdot d\theta$. Обозначим $F \doteq \begin{bmatrix} f_1 & \ldots & f_N\end{bmatrix}$, тогда $Q'_{x_i} = \begin{bmatrix} f'_{i\zeta_1} & \ldots & f'_{i\zeta_n}\end{bmatrix} \doteq (f_i)'_\theta$ и верно равенство

$$
\begin{aligned}
\delta Q(dx)\cdot d\theta &= (f_1)'_\theta dx_1 d\theta + \ldots + (f_N)'_\theta dx_N d\theta \\
&= \delta f_1(d\theta)dx_1 + \ldots + \delta f_N(d\theta)dx_N = \delta F(d\theta)\cdot dx.
\end{aligned}
$$

Утверждение доказано. □

Из (42) и утверждения 2 следует равество

$$
d^2\theta = -Q^{-1}\delta Q(d\theta)\cdot d\theta - 2Q^{-1}\delta F(d\theta)\cdot dx.
$$

Предложение доказано.

Доказательство теоремы 4. Из предложения 3 имеем

$$-Qd^2\theta = \left(Q'_{\zeta_1} d\zeta_1 + \ldots + Q'_{\zeta_n} d\zeta_n\right) d\theta + 2\left(F'_{\zeta_1} d\zeta_1 + \ldots + F'_{\zeta_n} d\zeta_n\right) dx.$$

Учтем равенство $d\theta = -Q^{-1} F dx$:

$$\begin{aligned} Qd^2\theta &= \left(Q'_{\zeta_1} d\zeta_1 + \ldots + Q'_{\zeta_n} d\zeta_n\right) Q^{-1} F dx - 2\left(F'_{\zeta_1} d\zeta_1 + \ldots + F'_{\zeta_n} d\zeta_n\right) dx \\ &= \left[\left(Q'_{\zeta_1} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_1}\right) d\zeta_1 + \ldots + \left(Q'_{\zeta_n} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_n}\right) d\zeta_n\right] dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$d^2\zeta_i = e_i^\top Q^{-1}\left[\left(Q'_{\zeta_1} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_1}\right) d\zeta_1 + \ldots + \left(Q'_{\zeta_n} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_n}\right) d\zeta_n\right] dx.$$

Далее внесем сомножитель $e_i^\top Q^{-1}$ в скобки и в каждом слагаемом напишем скалярные сомножители $d\zeta_{1\div n}$ слева. Придем к выражению

$$\begin{aligned} d^2\zeta_i = \big[d\zeta_1 \cdot e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_1} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_1}\right) & \\ + \ldots + d\zeta_n \cdot e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_n} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_n}\right)\big] dx. \end{aligned}$$

Теперь учтем равенство $d\zeta_k = -e_k^\top Q^{-1} F dx$. Поскольку это число, можем переставить сомножители: $d\zeta_k = -dx^\top F^\top Q^{-\top} e_k$. Получим

$$\begin{aligned} d^2\zeta_i = &- dx^\top F^\top Q^{-\top}\left[e_1 e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_1} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_1}\right)\right] dx \\ &- \ldots\ldots - dx^\top F^\top Q^{-\top}\left[e_n e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_n} Q^{-1} F - 2F'_n\right)\right] dx. \end{aligned}$$

Вернемся к равенству (13):

$$d^2\zeta_i = dx^\top \left(\zeta_i\right)''_{xx} dx.$$

В результате получим следующее выражение для матрицы вторых производных:

$$\begin{aligned} \left(\zeta_i\right)''_{xx} = -F^\top Q^{-\top}\big[e_1 e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_1} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_1}\right) & \\ + \ldots + e_n e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_n} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_n}\right)\big]. \end{aligned}$$

Обозначим сумму в квадратных скобках как $\left[e_1 q_1^\top + \ldots + e_n q_n^\top\right]$, где

$$q_k^\top \doteq e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_k} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_k}\right).$$

Верны равенства $e_1 q_1^\top + e_n q_n^\top = \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{bmatrix}}_{I} \begin{bmatrix} q_1^\top \\ \vdots \\ q_n^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^\top \\ \vdots \\ q_n^\top \end{bmatrix}$. Тогда

$$\left(\zeta_i\right)''_{xx} = -F^\top Q^{-\top} \begin{bmatrix} e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_1} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_1}\right) \\ \vdots \\ e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_n} Q^{-1} F - 2F'_{\zeta_n}\right) \end{bmatrix}. \qquad (43)$$

Теорема доказана.

Сравним результат с утверждением теоремы 3.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 96-138
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 96-138

Утверждение 3. Элементы матрицы $(\zeta_i)''_{xx}$ (43) совпадают с выражениями из формулы (12) теоремы 3.

Доказательство. Из формулы (12) теоремы 3 получаем

$$
\begin{aligned}
(\zeta_i)''_{x_j x_k} &= -e_i^\top Q^{-1}\left\{\left[a_{1,k} \quad \dots \quad a_{n,k}\right] Q^{-1} f_j - Q'_{x_j} Q^{-1} f_k\right\}\\
&= -e_i^\top Q^{-1}\left\{\left[Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k - (f_k)'_{\zeta_1} \quad \dots \quad Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k - (f_k)'_{\zeta_n}\right] Q^{-1} f_j\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left. - Q'_{x_j} Q^{-1} f_k\right\}. \qquad (44)
\end{aligned}
$$

Формула (43) дает

$$
(\zeta_i)''_{x_j x_k} = \underbrace{-f_j^\top Q^{-\top}}_{a^\top} \underbrace{\begin{bmatrix} e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k - 2\,(f_k)'_{\zeta_1}\right)\\ \vdots \\ e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k - 2\,(f_k)'_{\zeta_n}\right)\end{bmatrix}}_{b} \doteq a^\top b = b^\top a
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\begin{bmatrix} e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k - 2\,(f_k)'_{\zeta_1}\right)\\ \vdots \\ e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k - 2\,(f_k)'_{\zeta_n}\right)\end{bmatrix}^\top Q^{-1} f_j\\
&= -\left[e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k - 2\,(f_k)'_{\zeta_1}\right) \quad \dots \quad e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k - 2\,(f_k)'_{\zeta_n}\right)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times Q^{-1} f_j\\
&= -e_i^\top Q^{-1}\left[\left(Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k - 2\,(f_k)'_{\zeta_1}\right) \quad \dots \quad . \left(Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k - 2\,(f_k)'_{\zeta_n}\right)\right] Q^{-1} f_j\\
&= -e_i^\top Q^{-1}\left[\left(Q'_{\zeta_1} Q^{-1} f_k - (f_k)'_{\zeta_1}\right) \quad \dots \quad . \left(Q'_{\zeta_n} Q^{-1} f_k - (f_k)'_{\zeta_n}\right)\right] Q^{-1} f_j\\
&\qquad\qquad\qquad + e_i^\top Q^{-1}\left[(f_k)'_{\zeta_1} \quad \dots \quad (f_k)'_{\zeta_n}\right] Q^{-1} f_j. \qquad (45)
\end{aligned}
$$

Здесь учтено, что каждый элемент $e_i^\top Q^{-1}\left(Q'_{\zeta_m} Q^{-1} f_k - 2\,(f_k)'_{\zeta_m}\right)$, $m = \overline{1,n}$, вектора b суть скаляр и при транспонировании переходит сам в себя.

Для отождествления формул (44) и (45) остается проверить равенство

$$
Q'_{x_j} Q^{-1} f_k = \left[(f_k)'_{\zeta_1} \quad \dots \quad (f_k)'_{\zeta_n}\right] Q^{-1} f_j.
$$

Согласно утверждению 1, возможна перестановка j и k:

$$Q'_{x_j} Q^{-1} f_k = \left[(f_j)'_{\zeta_1} \quad \ldots \quad (f_j)'_{\zeta_n} \right] Q^{-1} f_k.$$

Для равенства будет достаточно условия

$$Q'_{x_j} = \left[(f_j)'_{\zeta_1} \quad \ldots \quad (f_j)'_{\zeta_n} \right].$$

Учитывая определение

$$\begin{aligned} Q \doteq (Fx)'_\theta &= (f_1 x_1 + \ldots + f_N x_N)'_\theta \\ &= \left[(f_1 x_1 + \ldots + f_N x_N)'_{\zeta_1} \quad \ldots \quad (f_1 x_1 + \ldots + f_N x_N)'_{\zeta_n} \right] \end{aligned}$$

приходим к равенству

$$Q'_{x_j} = \left[(f_j)'_{\zeta_1} \quad \ldots \quad (f_j)'_{\zeta_n} \right]. \tag{46}$$

Утверждение доказано. □

Доказательство леммы 2. Используем неравенство

$$\|H\| \leqslant \|H\|_F = \sqrt{\|h_1\|^2 + \ldots + \|h_n\|^2}.$$

Согласно (17)

$$h_i = \begin{cases} \left[1; \ \ \zeta_i; \ \ \ldots; \ \ \zeta_i^{N-1}\right], & |\zeta_i| \leqslant 1, \quad i = \overline{1, m}, \\ \\ \left[(1/\zeta_i)^{N-1}; \ \ (1/\zeta_i)^{N-2}; \ \ \ldots; \ \ 1\right], & |\zeta_i| > 1, \quad i = \overline{m+1, n}. \end{cases}$$

По сумме геометрической прогрессии $1+q+\ldots+q^{N-1} = \frac{1-q^N}{1-q}$ для $q = |\zeta_i|^2$ и $q = |1/\zeta_i|^2$ имеем

$$\|h_i\|^2 = \begin{cases} \frac{1-|\zeta_i|^{2N}}{1-|\zeta_i|^2} < N, & |\zeta_i| < 1, \quad i = \overline{1, m}, \\ N, & |\zeta_i| = 1, \quad i = \overline{1, m}, \\ \frac{1-|1/\zeta_i|^{2N}}{1-|1/\zeta_i|^2} < N, & |\zeta_i| > 1, \quad i = \overline{m+1, n}. \end{cases}$$

Здесь мы использовали тот факт, что функция $\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$ непрерывна, монотонно растет по $\alpha \geqslant 0$, в точке $\alpha = 1$ принимает значение N.

В итоге $\|h_i\|^2 \leqslant N$ для $i \in \overline{1, n}$, откуда следует

$$\|H\| \leqslant \sqrt{\|h_1\|^2 + \ldots + \|h_n\|^2} \leqslant \sqrt{nN}.$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Имеем

$$\|H_i'\| = \sup_{\|x\|=1} \left\| \begin{bmatrix} 0 & \dots & h_i' & \dots & 0 \end{bmatrix} x \right\| = \|h_i'\|,$$

$$\|H'\| \leqslant \|H'\|_F = \sqrt{\|h_1'\|^2 + \ldots + \|h_n'\|^2}.$$

Здесь

$$h_i' = \left[0; 1; 2\zeta_1; \ldots; (N-1)\,\zeta_i^{N-2}\right], \quad i = \overline{1,m},$$

$$\begin{aligned} |h_i'| &= \left[(N-1)\,(1/\zeta_i)^N; \quad (N-2)\,(1/\zeta_i)^{N-1}; \quad \ldots; \quad 2\,(1/\zeta_i)^3; \quad (1/\zeta_i)^2; \quad 0\right] \\ &= \left[(N-1)\,(1/\zeta_i)^{N-2}; \quad (N-2)\,(1/\zeta_i)^{N-3}; \quad \ldots; \quad 2\,(1/\zeta_i); \quad 1; \quad 0\right](1/\zeta_i)^2, \\ &\qquad i = \overline{m+1,n}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\|h_i'\|^2 = \begin{cases} 1^2 + 2^2|\zeta_i|^2 + \ldots + (N-1)^2\,|\zeta_i|^{2(N-2)}, & i \in \overline{1,m}, \\ \left[1^2 + 2^2\,|1/\zeta_i|^2 + \ldots + (N-1)^2\,|1/\zeta_i|^{2(N-2)}\right]|1/\zeta_i|^4, & i \in \overline{m+1,n}. \end{cases} \tag{47}$$

Для оценки сверху исследуем конечную сумму ряда

$$A_N \doteq 1^2 + 2^2 q + 3^2 q^2 + \ldots + N^2 q^{N-1}, \quad |q| \leqslant 1.$$

Эта сумма оценивается через интеграл:

$$A_N < \int_0^N (t+1)^2\, q^t \mathrm{d}t \leqslant \int_0^N (t+1)^2\, \mathrm{d}t = \frac{(N+1)^3 - 1}{3} < \frac{(N+1)^3}{3}.$$

Применяя эту оценку к рядам (47) с $q = |\zeta_i|^2 \leqslant 1$ или $q = |1/\zeta_j|^2 \leqslant 1$, получим

$$\|h_i'\|^2 < \begin{cases} \frac{N^3}{3}, & i \in \overline{1,m}, \\ \frac{N^3}{3}\,|1/\zeta_i|^2 \leqslant \frac{N^3}{3}, & i \in \overline{m+1,n}. \end{cases}$$

Отсюда следует $\|H_i'\| < \sqrt{\frac{N^3}{3}}$ и $\|H'\| < \sqrt{n\frac{N^3}{3}}$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 4. Из определения следует $H_i'' = \begin{bmatrix} 0 & h_i'' & 0 \end{bmatrix}$,

$$\|H_i''\| = \sup_{\|x\|=1} \left\| \begin{bmatrix} 0 & h_i'' & 0 \end{bmatrix} x \right\| = \|h_i''\|,$$

$$h_i'' = \left[0; \quad 0; \quad 2\cdot 1; \quad 3\cdot 2\zeta_i; \quad \ldots; \quad (N-1)\,(N-2)\,\zeta_i^{N-3}\right], \quad i = \overline{1,m},$$

$$h_i'' = \begin{bmatrix} (N-1)\,N\,(1/\zeta_i)^{N+1} \\ (N-2)\,(N-1)\,(1/\zeta_i)^{N} \\ \vdots \\ 2\cdot 3\,(1/\zeta_i)^4 \\ 1\cdot 2\,(1/\zeta_i)^3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N-1)\,N\,(1/\zeta_i)^{N-2} \\ (N-2)\,(N-1)\,(1/\zeta_i)^{N-3} \\ \vdots \\ 2\cdot 3\,(1/\zeta_i) \\ 1\cdot 2 \\ 0 \end{bmatrix} (1/\zeta_i)^3\,, \quad i=\overline{m+1,n}.$$

Квадрат нормы дается выражениями

$$\|h_i''\|^2 = 2^2 + (2\cdot 3)^2\,|\zeta_i|^2 + \ldots + (N-2)^2\,(N-1)^2\,|\zeta_i|^{2(N-3)}, \quad i=\overline{1,m},$$

$$\|h_j''\|^2 = \left[2^2 + (2\cdot 3)^2\,|1/\zeta_j|^2 + \ldots + (N-1)^2\,N^2\,|1/\zeta_j|^{2(N-2)}\right]|1/\zeta_j|^6\,, \quad j=\overline{m+1,n}.$$

Для оценки сверху исследуем конечную сумму ряда

$$B_N \doteq (2)^2 + (2\cdot 3)^2 + \ldots + ((N-1)\,N)^2 < 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + N^4.$$

Правая часть неравенства оценивается через интеграл:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + N^4 < \int\limits_0^N (t+1)^4\,\mathrm{d}t = \frac{(N+1)^5 - 1}{5} < \frac{(N+1)^5}{5}.$$

Применяя к рядам (47) с $q = |\zeta_i|^2 \leqslant 1$ или $q = |1/\zeta_i|^2 \leqslant 1$, получим

$$\|h_i''\|^2 < \begin{cases} B_{N-1} < \frac{N^5}{5}, & i=\overline{1,m}, \\ B_N < \frac{(N+1)^5}{5}\,|1/\zeta_i|^6 \leqslant \frac{(N+1)^5}{5}, & i=\overline{m+1,n}. \end{cases}$$

Отсюда следует $\|H_i''\| = \|h_i''\| < \sqrt{\frac{(N+1)^5}{5}}$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 5. Из определения следует $H_i''' = \begin{bmatrix} 0 & h_i''' & 0 \end{bmatrix}$, $\|H_i''\| = \sup_{\|x\|=1} \left\| \begin{bmatrix} 0 & h_i'' & 0 \end{bmatrix} x \right\| = \|h_i''\|$,

$$h_i''' = \left[0;\ \ 0;\ \ 0;\ \ 3\cdot 2\cdot 1;\ \ 4\cdot 3\cdot 2\zeta_i;\ \ \ldots;\ \ (N-1)\,(N-2)\,(N-3)\,\zeta_i^{N-4}\right],$$
$$i = \overline{1,m},$$

$$|h_j'''| = \begin{bmatrix} (N-1)\,N\,(N+1)\,(1/\zeta_j)^{N+2} \\ (N-2)\,(N-1)\,N\,(1/\zeta_j)^{N+1} \\ \vdots \\ 2\cdot 3\cdot 4\,(1/\zeta_j)^5 \\ 1\cdot 2\cdot 3\,(1/\zeta_j)^4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N-1)\,N\,(N+1)\,(1/\zeta_j)^{N-2} \\ (N-2)\,(N-1)\,N\,(1/\zeta_j)^{N-3} \\ \vdots \\ 2\cdot 3\cdot 4\,(1/\zeta_j) \\ 1\cdot 2\cdot 3 \\ 0 \end{bmatrix} \times (1/\zeta_j)^4, \quad j = \overline{m+1,n}.$$

Оценку сверху для квадрата нормы h_i''' получим через сумму ряда

$$C_N \doteq (1\cdot 2\cdot 3) + (2\cdot 3\cdot 4)^2 + \ldots + ((N-2)\,(N-1)\,N)^2 < 1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + N^6.$$

Правая часть неравенства оценивается через интеграл:

$$1 + 2^6 + 3^6 + \ldots + N^6 < \int\limits_0^N (t+1)^6\,\mathrm{d}t = \frac{(N+1)^7 - 1}{7} < \frac{(N+1)^7}{7}.$$

Применяя к рядам (47) с $q = |\zeta_i|^2 \leqslant 1$ или $q = |1/\zeta_i|^2 \leqslant 1$, получим

$$\|h_i'''\|^2 < \begin{cases} C_{N-1} < \frac{N^7}{7}, & i = \overline{1,m}, \\ C_{N+1} < \frac{(N+2)^7}{7}\,|1/\zeta_i|^2 \leqslant \frac{(N+2)^7}{7}, & i = \overline{m+1,n}. \end{cases}$$

Отсюда следует $\|H_i'''\| = \|h_i'''\| < \sqrt{\frac{(N+2)^7}{7}}$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 6. Обозначим $H_0 \doteq \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \zeta_1 & \ldots & \zeta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \zeta_1^{N-1} & \ldots & \zeta_n^{N-1} \end{bmatrix}$. Верны неравенства

$$\left\| \left(H_0^\top H_0\right)^{-1} \right\| = \lambda_{\max}\left(\left[H_0^\top H_0\right]^{-1}\right) = \frac{1}{\lambda_{\min}\left(H_0^\top H_0\right)} \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}\left(W^\top W\right)},$$

где $W = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \zeta_1^{n-1} & \ldots & \zeta_n^{n-1} \end{bmatrix}$ — матрица Вандермонда и верхняя клетка $n \times n$ в матрице $H_0 \doteq \begin{bmatrix} W \\ \bar{H} \end{bmatrix}$. Ключевое неравенство основано на оценке

$\lambda_{\min}\left(H_0^\top H_0\right) \geqslant \lambda_{\min}\left(W^\top W\right)$, которая вытекает из соотношений

$$\lambda_{\min}\left(H_0^\top H_0\right) = \lambda_{\min}\left(W^\top W + \bar{H}^\top \bar{H}\right) = \inf_{x\neq 0} \frac{x^\top \left(W^\top W + \bar{H}^\top \bar{H}\right) x}{x^\top x}$$
$$\geqslant \inf_{x\neq 0} \frac{x^\top W^\top W x}{x^\top x} + \inf_{y\neq 0} \frac{y^\top \bar{H}^\top \bar{H} y}{y^\top y} \geqslant \inf_{x\neq 0} \frac{x^\top W^\top W x}{x^\top x} = \lambda_{\min}\left(W^\top W\right).$$

Верно неравенство

$$\lambda_{\min}\left(W^\top W\right) \geqslant \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\zeta_i - \zeta_j\right)^2}{\left[\lambda_{\max}\left(W^\top W\right)\right]^{n-1}},$$

которое следует из выражения для определителя Вандермонда

$$\det W = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\zeta_j - \zeta_i\right)$$

и связанных с ним равенств

$$\det W^\top W = \lambda_{\min}\left(W^\top W\right) \ldots \lambda_{\max}\left(W^\top W\right) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\zeta_i - \zeta_j\right)^2.$$

Отсюда получаем

$$\left\|\left(H_0^\top H_0\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\left[\lambda_{\max}\left(W^\top W\right)\right]^{n-1}}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\zeta_i - \zeta_j\right)^2}.$$

Из леммы 2 следует оценка сверху для наибольшего собственного числа

$$\lambda_{\max}\left(W^\top W\right) = \|W\|^2 \leqslant n^2.$$

Тогда

$$\left\|\left(H_0^\top H_0\right)^{-1}\right\| \leqslant \left[\frac{n^{n-1}}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\zeta_i - \zeta_j\right)}\right]^2.$$

Перейдем к оценке нормы $\left\|\left(H^\top H\right)^{-1}\right\|$ для матрицы H (17), используя равенство $H = H_0 D$,

$$D \doteq \begin{bmatrix} I_m & & & 0 \\ & \zeta_{m+1}^{N-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \zeta_n^{N-1} \end{bmatrix}.$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 96-138
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 96-138

Имеем

$$\left\|\left(H^\top H\right)^{-1}\right\| = \left\|D\left(H_0^\top H_0\right)^{-1} D\right\| \leqslant \|D\|^2 \left\|\left(H_0^\top H_0\right)^{-1}\right\|.$$

Учитывая соотношения $|\zeta_i| \leqslant 1 < |\zeta_j|$ для $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{m+1,n}$, можем написать $\|D\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_i|^{N-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\left\|\left(H^\top H\right)^{-1}\right\| &\leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_i|^{N-1}\right)^2 \left\|\left(H_0^\top H_0\right)^{-1}\right\| \leqslant \left[\frac{n^{n-1}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\zeta_i|^{N-1}}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\zeta_i-\zeta_j)}\right]^2 \\ &\leqslant \left[\frac{n^{n-1}\max_i |\zeta_i|^{N-1}}{\left\{\min_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\zeta_i-\zeta_j)\right\}^{\frac{n(n-1)}{2}}}\right]^2.\end{aligned}$$

В последнем неравенстве учтено, что число сомножителей в знаменателе равно

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 7. Имеем

$$\begin{aligned}\Pi'_{\zeta_i} =& H_i'\left(H^\top H\right)^{-1} H^\top + H\left(H^\top H\right)^{-1} H_i'^\top \\ &- H\left(H^\top H\right)^{-1}\left(H_i'^\top H + H^\top H_i'\right)\left(H^\top H\right)^{-1} H^\top.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\left\|\Pi'_{\zeta_i}\right\| \leqslant 2\|H_i'\|\,\|H\|\left\|\left(H^\top H\right)^{-1}\right\| + 2\|H\|^3\|H_i'\|\left\|\left(H^\top H\right)^{-1}\right\|^2 \\ &= 2\|H_i'\|\,\|H\|\left\|\left(H^\top H\right)^{-1}\right\|\left(1+\|H\|^2\left\|\left(H^\top H\right)^{-1}\right\|\right) \doteq 2\eta_0\eta_1\mu\left(1+\mu\eta_0^2\right).\end{aligned}$$

С учетом лемм 2 и 3

$$\left\|\Pi'_{\zeta_i}\right\| \doteq \pi_1 \leqslant 2\mu\eta_0\eta_1\left(1+\alpha\eta_0^2\right).$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 8. Верны соотношения

$$\begin{aligned}
\left\|\Pi''_{\zeta_i\zeta_j}\right\| &= \left\|\Big[H'_i\left(H^\top H\right)^{-1}H^\top + H\left(H^\top H\right)^{-1}H_i'^\top - \right.\\
&\qquad \left. - H\left(H^\top H\right)^{-1}\left(H_i'^\top H + H^\top H'_i\right)\left(H^\top H\right)^{-1}H^\top\Big]'_{\zeta_j}\right\|\\
&\leqslant 2\left\|\Big[H'_i\left(H^\top H\right)^{-1}H^\top\Big]'_{\zeta_j}\right\| + 2\left\|\Big[H\left(H^\top H\right)^{-1}H^\top H'_i\left(H^\top H\right)^{-1}H^\top\Big]'_{\zeta_j}\right\|\\
&\qquad \leqslant 2\left(\delta_{ij}\mu\left\|H''_i\right\|\left\|H\right\| + \beta\left\|H'_i\right\|\left\|H\right\| + \mu\left\|H'_i\right\|^2\right)\\
&\qquad + 2\left(\delta_{ij}\mu^2\left\|H''_i\right\|\left\|H\right\|^3 + 2\mu\beta\left\|H'_i\right\|\left\|H\right\|^3 + 3\mu^2\left\|H'_i\right\|^2\left\|H\right\|^2\right).
\end{aligned}$$

Здесь $\mu \doteq \left\|\left(H^\top H\right)^{-1}\right\|$, $\beta \doteq \left\|\left[\left(H^\top H\right)^{-1}\right]'_{\zeta_j}\right\| \leqslant 2\mu^2\left\|H'_i\right\|\left\|H\right\|$.
Заменяя β оценкой сверху, получим

$$\begin{aligned}
\left\|\Pi''_{\zeta_i\zeta_j}\right\| &\leqslant 2\mu\left(\delta_{ij}\left\|H''_i\right\|\left\|H\right\| + 2\mu\left\|H'_i\right\|^2\left\|H\right\|^2 + \left\|H'_i\right\|^2\right)\\
&\qquad + 2\mu^2\left\|H\right\|^2\left(\delta_{ij}\left\|H''_i\right\|\left\|H\right\| + 4\mu\left\|H'_i\right\|^2\left\|H\right\|^2 + 3\left\|H'_i\right\|^2\right).
\end{aligned}$$

После перегруппировки слагаемых

$$\begin{aligned}
\left\|\Pi''_{\zeta_i\zeta_j}\right\| &\leqslant 2\mu\delta_{ij}\left\|H''_i\right\|\left\|H\right\|\left(1+\mu\left\|H\right\|^2\right)\\
&\qquad + 4\mu^2\left\|H'_i\right\|^2\left\|H\right\|^2\left(1+2\mu\left\|H\right\|^2\right) + 2\mu\left\|H'_i\right\|^2\left(1+3\mu\left\|H\right\|^2\right).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 10. Верны равенства

$$\begin{aligned}
&Q = \left[F'_{\zeta_1}x \quad \dots \quad F'_{\zeta_n}x\right],\\
&\quad Q'_{\zeta_i} = \left[F''_{\zeta_1\zeta_i}x \quad \dots \quad F''_{\zeta_n\zeta_i}x\right] = \left[(Fx)''_{\zeta_1\zeta_i} \quad \dots \quad (Fx)''_{\zeta_n\zeta_i}\right],\\
&\quad F = H'^\top\left[I - \Pi_H\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Fx)'_{\zeta_i} &= H_i''^\top\left[I-\Pi_H\right]x + H'^\top\left(-\Pi_H\right)'_{\zeta_i}x,\\
(Fx)''_{\zeta_i\zeta_j} &= \delta_{ij}H_i'''^\top\left[I-\Pi_H\right]x + H_i''^\top\left(-\Pi_H\right)'_{\zeta_j}x\\
&\quad + \delta_{ij}H_i''^\top\left(-\Pi_H\right)'_{\zeta_i}x + H'^\top\left(-\Pi_H\right)''_{\zeta_i\zeta_j}x.
\end{aligned} \tag{48}$$

Следовательно, помимо полученного ранее нужна оценка нормы $\left\|\Pi''_{\zeta_i\zeta_j}\right\| \doteq \pi_2$ (см. лемму 8).

$$\begin{aligned}
\left\|Q'_{\zeta_i}\right\| \leqslant \left\|Q'_{\zeta_i}\right\|_F = \|x\| \sqrt{\left\|F''_{\zeta_1\zeta_i}\right\|^2 + \ldots + \left\|F''_{\zeta_n\zeta_i}\right\|^2},\\
\left\|F''_{\zeta_i\zeta_j}\right\| \leqslant \delta_{ij}\left(\left\|H'''_i\right\| + \left\|H''_i\right\|\left\|\Pi'_{\zeta_i}\right\|\right) + \left\|H''_i\right\|\left\|\Pi'_{\zeta_i}\right\| + \left\|H'\right\|\left\|\Pi''_{\zeta_i\zeta_j}\right\|\\
\doteq \delta_{ij}\left(\eta_3 + \eta_2\pi_1\right) + \eta_2\pi_1 + \eta_{01}\pi_2.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\left\|Q'_{\zeta_i}\right\| &\leqslant \|x\| \sqrt{\left\|F''_{\zeta_1\zeta_i}\right\|^2 + \ldots + \left\|F''_{\zeta_n\zeta_i}\right\|^2}\\
&\leqslant \|x\| \sqrt{\left[\left(\eta_3 + \eta_2\pi_1\right) + \eta_2\pi_1 + \eta_{01}\pi_2\right]^2 + (n-1)\left[\eta_2\pi_1 + \eta_{01}\pi_2\right]^2}\\
&= \|x\|\left(\eta_2\pi_1 + \eta_{01}\pi_2\right)\sqrt{(n-1) + \left[\frac{\left(\eta_3 + \eta_2\pi_1\right)}{\left(\eta_2\pi_1 + \eta_{01}\pi_2\right)} + 1\right]^2}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 9. Обозначим q_i i-й столбец обратной матрицы Q^{-1}. Из равенства $(Q + \Delta Q)\left(Q^{-1} + \Delta Q^{-1}\right) = I$ следует

$$(Q + \Delta Q)\left(q_i + \Delta q_i\right) = e_i.$$

Имеет место неравенство [20, с. 180] $\|\Delta q_i\| \leqslant \frac{\left\|Q^{-1}\right\|\|\Delta Q\|}{1-\left\|Q^{-1}\right\|\|\Delta Q\|}\|q_i\|$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta Q^{-1}\right\| \leqslant \frac{\left\|Q^{-1}\right\|\|\Delta Q\|}{1 - \left\|Q^{-1}\right\|\|\Delta Q\|}\left\|Q^{-1}\right\|_F \leqslant \frac{\left\|Q^{-1}\right\|_F\|\Delta Q\|}{1 - \left\|Q^{-1}\right\|_F\|\Delta Q\|}\left\|Q^{-1}\right\|_F\\
= \frac{\|\Delta Q\|}{\varkappa^{-1} - \|\Delta Q\|}\varkappa.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 11. Запишем уравнение (28) в виде

$$y = \left(\frac{\alpha}{\beta - y} + \gamma\right)\varepsilon.$$

1. С учетом (27) верно $y < \beta$. Равносильное уравнение

$$\begin{aligned}
y^2 - (\beta + \gamma\varepsilon)\,y + \alpha\varepsilon + \beta\gamma\varepsilon = \left[y - \frac{(\beta + \gamma\varepsilon)}{2}\right]^2 - \frac{(\beta + \gamma\varepsilon)^2}{4} + (\alpha + \beta\gamma)\,\varepsilon\\
= 0
\end{aligned}$$

имеет наименьший корень

$$y_1 = \frac{(\beta+\gamma\varepsilon)}{2} - \sqrt{\frac{(\beta+\gamma\varepsilon)^2}{4} - (\alpha+\beta\gamma)\,\varepsilon}.$$

Рассмотрим зависимость $y_1(\varepsilon)$. Условием разрешимости уравнения является неотрицательность дискриминанта: $\frac{(\beta+\gamma\varepsilon)^2}{4} - (\alpha+\beta\gamma)\,\varepsilon \geqslant 0$. Обозначим

$$a \doteq \frac{\alpha}{\gamma^2}, \quad b \doteq \frac{\beta}{\gamma},$$

получим неравенство $(\varepsilon+b)^2 - 4\,(a+b)\,\varepsilon > 0$. Дискриминант неотрицателен при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ или $\varepsilon \geqslant \varepsilon_2$,

$$\varepsilon_{1,2} = (2a+b) \mp \sqrt{(2a+b)^2 - b^2} = \frac{\beta}{\gamma}\left(\varphi \mp \sqrt{\varphi^2-1}\right), \quad \varphi \doteq 2\frac{\alpha}{\beta\gamma} + 1.$$

Ввиду очевидного соотношения $\varepsilon_2 = \frac{\beta}{\gamma}\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2-1}\right) > \frac{\beta}{\gamma}$, значения $\varepsilon \geqslant \varepsilon_2$ хотя формально и обеспечивают разрешимость уравнения (28), но не рассматриваются в качестве допустимых ввиду второго неравенства в (27).

2. Вторая часть леммы элементарна.

3. Докажем неравенство $\varepsilon_1 < \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{\varphi} < \frac{\beta}{\gamma}$. Из него будет следовать

$$y(\varepsilon_1) = \frac{(\beta+\gamma\varepsilon_1)}{2} < \beta\left(1 - \frac{\alpha}{\beta\gamma\varphi}\right),$$

и тем самым лемма будет доказана.

Имеем $\varepsilon_1 = \frac{\beta}{\gamma}\left(\varphi - \sqrt{\varphi^2-1}\right)$, $\varphi \doteq 2\frac{\alpha}{\beta\gamma} + 1 > 0$. Тогда неравенство $\varepsilon_1 < \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{\varphi}$ равносильно неравенствам

$$\varphi - \sqrt{\varphi^2-1} < \frac{1}{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^2 - 1 < \varphi\sqrt{\varphi^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \varphi - \sqrt{\varphi^2-1}.$$

Последнее неравенство верно, значит, $\varepsilon_1 < \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{\varphi}$, $y(\varepsilon_1) < \beta\left(1 - \frac{\alpha}{\varphi\beta\gamma}\right)$, и лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. Выполним сингулярное разложение

$$\hat{V}_1 = PSQ, \quad P^\top P = I, \quad Q^\top Q = I, \quad S = \operatorname{diag}\left[\sigma_1, \ldots, \sigma_n\right].$$

Следствием (34) будут уравнения

$$SQ\hat{\alpha} = -P^\top \hat{v}, \quad \left(SQ + P^\top \Delta \hat{V}_1\right)(\hat{\alpha} + \Delta\hat{\alpha}) = -P^\top (\hat{v} + \Delta\hat{v}), \tag{49}$$

в которых матрица SQ квадратная неособенная. Далее можно рассуждать следуя [20, с. 180]. Наложим условие

$$\|Q^\top S^{-1} P^\top \Delta \hat{V}_1\| < \|I\| = 1,$$

при котором существует обратная

$$\left(SQ + P^\top \Delta \hat{V}_1\right)^{-1} = \left(I + Q^\top S^{-1} P^\top \Delta \hat{V}_1\right)^{-1} Q^\top S^{-1}.$$

Из (49) получим

$$\left(SQ + P^\top \Delta \hat{V}_1\right) \Delta\hat{\alpha} = -\left(SQ + P^\top \Delta \hat{V}_1\right)\hat{\alpha} - P^\top (\hat{v} + \Delta\hat{v}),$$

или

$$\Delta\hat{\alpha} = \left(I + Q^\top S^{-1} P^\top \Delta \hat{V}_1\right)^{-1} Q^\top S^{-1} \left(-P^\top \Delta \hat{V}_1 \cdot \hat{\alpha} - P^\top \Delta\hat{v}\right).$$

Отсюда получаем оценку

$$\|\Delta\hat{\alpha}\| \leqslant \frac{\|S^{-1}P^\top \Delta \hat{V}_1\| \cdot \|\hat{\alpha}\| + \|S^{-1}P^\top \Delta\hat{v}\|}{1 - \|S^{-1}P^\top \Delta \hat{V}_1\|} \leqslant \sigma_{\min}^{-1} \cdot \frac{\|\Delta \hat{V}_1\| \cdot \|\hat{\alpha}\| + \|\Delta\hat{v}\|}{1 - \sigma_{\min}^{-1} \cdot \|\Delta \hat{V}_1\|},$$

которая существует при условии $\sigma_{\min}^{-1} \cdot \|\Delta \hat{V}_1\| < 1$.

Учтем неравенства $\|\Delta \hat{V}_1\| \leqslant \|\Delta \hat{V}\|$, $\|\Delta\hat{v}\| \leqslant \|\Delta \hat{V}\|$:

$$\|\Delta\hat{\alpha}\| \leqslant \rho \cdot \|\Delta \hat{V}\| \cdot \frac{\|\hat{\alpha}\| + 1}{1 - \rho \cdot \|\Delta \hat{V}\|}, \quad \rho \doteq \sigma_{\min}^{-1} = \lambda_{\min}^{-1/2}\left(\hat{V}_1^\top \hat{V}_1\right).$$

Перейдем к относительным величинам.

$$\rho = \lambda_{\min}^{-1/2}\left(\frac{\hat{V}_1}{\|\hat{V}\|}^\top \frac{\hat{V}_1}{\|\hat{V}\|} \cdot \|\hat{V}\|^2\right) = \|\hat{V}\|^{-1} \lambda_{\min}^{-1/2}\left(\frac{\hat{V}_1}{\|\hat{V}\|}^\top \frac{\hat{V}_1}{\|\hat{V}\|}\right) \doteq \|\hat{V}\|^{-1}\overline{\rho},$$

$$\frac{\|\Delta\hat{\alpha}\|}{\|\hat{\alpha}\|} \leqslant \overline{\rho} \cdot \frac{\|\Delta \hat{V}\|}{\|\hat{V}\|} \cdot \frac{1 + 1/\|\hat{\alpha}\|}{1 - \overline{\rho} \cdot \frac{\|\Delta \hat{V}\|}{\|\hat{V}\|}}.$$

Для величин $\varepsilon_{\hat{\alpha}} \doteq \frac{\|\Delta\hat{\alpha}\|}{\|\hat{\alpha}\|}$, $\varepsilon_x \doteq \frac{\|\Delta \hat{V}\|}{\|\hat{V}\|}$, $\overline{\rho} = \lambda_{\min}^{-1/2}\left(\frac{\hat{V}_1}{\|\hat{V}\|}^\top \frac{\hat{V}_1}{\|\hat{V}\|}\right)$ получили гарантированную оценку сверху

$$\varepsilon_{\hat{\alpha}} \leqslant \overline{\rho}\varepsilon_x \cdot \frac{1 + 1/\|\hat{\alpha}\|}{1 - \overline{\rho}\varepsilon_x}.$$

Теорема доказана.

§ 10. Список обозначений

$\varepsilon \doteq \varepsilon_x \|x\|,$	формула (7)
$\eta_0 \doteq \|H\| \leqslant \sqrt{nN},$	лемма 2
$\eta_{01} \doteq \|H'\| \leqslant \sqrt{\frac{nN^3}{3}},$	лемма 3
$\eta_1 \doteq \|H_i'\| \leqslant \sqrt{\frac{N^3}{3}},$	лемма 3
$\eta_2 \doteq \|H_i''\| \leqslant \sqrt{\frac{(N+1)^5}{5}},$	лемма 4
$\eta_3 \doteq \|H_i'''\| \leqslant \sqrt{\frac{(N+2)^7}{7}},$	лемма 5
$\mu \doteq \left\| \left(H^\top H \right)^{-1} \right\| \leqslant \left[\frac{n^{n-1} \max_i \|\zeta_i\|^{N-1}}{\{\min_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\zeta_i - \zeta_j)\}^{\frac{n(n-1)}{2}}} \right]^2,$	лемма 6
$\pi_1 \doteq \left\| \Pi'_{\zeta_i} \right\|,$	формула (18)
$\pi_2 \doteq \left\| \Pi''_{\zeta_i \zeta_j} \right\|,$	лемма 8
$\varphi_1 \doteq \left\| F'_{\zeta_i} \right\| \leqslant \eta_2 + \eta_{01}\pi_1,$	формула (19)
$\varkappa_1 \doteq \left\| Q'_{\zeta_i} \right\|,$	лемма 10
$\varkappa \doteq \|Q^{-1}\|_F,$	стр. 107
$\alpha \doteq n\varkappa_1\eta_{01}, \qquad \beta \doteq \varkappa^{-1}, \qquad \gamma \doteq n^2\varphi_1$	формула (29)
$\varphi \doteq 2\frac{\alpha}{\beta\gamma} + 1,$	формула (30)
$c_2 \doteq \frac{\sqrt{n}\eta_{01}}{2\left(\frac{\alpha}{\gamma\varphi}\right)^2} \left(\frac{\varkappa_1\eta_{01}}{\left(\frac{\alpha}{\gamma\varphi}\right)} + 2\varphi_1 \right).$	формула (32)

Список литературы

1. *de Prony, Baron Gaspard Riche.* Essai éxperimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures // *Journal de l'École Polytechnique.* 1795. V. 1. Cahier 22, 24–76.

2. *Ломов А. А.* О локальной устойчивости в задаче идентификации коэффициентов линейного разностного уравнения // *Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика.* 2010. Т. 10, вып. 4. С. 81–103.

3. *Ланцош К. Практические методы прикладного анализа.* М.: ФМЛ, 1961.

4. *Householder A. S. On Prony's method of fitting exponential decay curves and multiple-hit survival curves.* Oak Ridge National Lab. Report ORNL-455. 1950. Oak Ridge, Tennessee.

5. *Бердышев В. И., Петрак Л. В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения.* Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН, 1999.

6. *Osborne M. R.* A class of nonlinear regression problems // *Data Representation* / Eds. R. S. Anderssen and M. R. Osborne. St. Lucia: University of Queensland Press, 1970. P. 94–101.

7. *Егоршин А. О., Будянов В. П.* Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ // *Автометрия.* 1973. № 1. С. 78–82.

8. *Егоршин А. О.* Метод наименьших квадратов и «быстрые» алгоритмы в вариационных задачах идентификации и фильтрации (метод ВИ) // *Автометрия.* 1988. № 1. С. 30–42.

9. *Markovsky I., Van Huffel S.* Overview of Total Least Squares Methods // *Signal Processing.* 2007. V. 87. P. 2283–2302.

10. *Ломов А. А.* Вариационные методы идентификации линейных динамических систем и проблема локальных экстремумов // *Управление большими системами.* 2012. Вып. 39. С. 53–94.

11. *Egorshin A. O.* Counter equations: smoothing, filtration, identification // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2020. Т. 17. С. 1322–1351.

12. *Ломов А. А.* О состоятельности обобщенных орторегрессионных оценок параметров линейной динамической системы // *Сибирский журнал индустриальной математики.* 2013. Т. XVI. № 4(56). С. 87–93.

13. *Markovsky I., Pintelon R.* Identification of linear time-invariant systems from multiple experiments // *IEEE Trans. Signal Process.* 2015. V. 63(13). P. 3549–3554.

14. *Osborne M. R., Smyth G. K.* A Modified Prony Algorithm for Exponential Function Fitting // *SIAM Journal of Scientific Computing.* 1995. V. 16. P. 119–138.

15. *Измаилов А. Ф. Чувствительность в оптимизации.* М.: Физматлит, 2006.

16. *Ломов А. А., Русинова Е. А.* Сравнение целевых функций в задаче Прони для аппроксимации данных измерений // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика».* 2022. Т. 11, № 2. С. 18–27.

17. *Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.* М.: Наука, 1988.

18. *Ломов А. А., Федосеев А. В.* Сравнение методов параметрической идентификации линейных динамических систем в условиях смешанных возмущений // *Сибирский журнал чистой и прикладной математики.* 2018. Т. 18. Н. 3. С. 45–59.

19. *Ломов А. А.* Оценка трендов и идентификация динамики временных рядов на коротких интервалах наблюдения // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2009. № 1. С. 25–37.

20. *Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений.* М.: Наука, 1970.

References

1. *de Prony, Baron Gaspard Riche.* Essai éxperimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures // *Journal de l'École Polytechnique.* 1795. V. 1. Cahier 22, P. 24–76.

2. *Lomov A. A.* Local stability in the problem of identifying coefficients of a linear difference equation // *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.* 2010. V. 10, N. 4. P. 81–103.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 96-138
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 96-138

3. *Lantsosh C. Practical methods of applied analysis.* M.: PML, 1961.

4. *Householder A. S. On Prony's method of fitting exponential decay curves and multiple-hit survival curves.* Oak Ridge National Lab. Report ORNL-455. 1950. Oak Ridge, Tennessee.

5. *Berdyshev, V. I.; Petrak, L. V. Approximation of functions, compression of numerical information, applications.* Tr. Inst. Mat. Mekh. (Ekaterinburg), 1999.

6. *Osborne M. R.* A class of nonlinear regression problems // *Data Representation* / Eds. R. S. Anderssen and M. R. Osborne. St. Lucia: University of Queensland Press, 1970. P. 94–101.

7. *Egorhin A. O., Budyanov V. P.* Smoothing of signals and estimation of dynamic parameters in automatic systems using a digital computer // *Avtometriya.* 1973. N. 1. P. 78–82.

8. *Egorhin A. O.* Method of least squares and «fast» algorithms in variational identification and filtering problems (VI method) // *Avtometriya.* 1988. N. 1. P. 30–42.

9. *Markovsky I., Van Huffel S.* Overview of Total Least Squares Methods // *Signal Processing.* 2007. V. 87. P. 2283–2302.

10. *Ломов А. А.* Variational Identification Methods for Linear Dynamic Systems and Local Extremal Problem // *Upravlenie Bol'shimi Sistemami.* 2012. N. 39. P. 53–94.

11. *Egorshin A. O.* Counter equations:smoothing, filtration, identification // *Sib. ?lektron. Mat. Izv.* 2020. V. 17. P. 1322–1351.

12. *Ломов А. А.* On the consistency of generalized orthoregressive parameter estimates for a linear dynamical system // *Sib. Zhurn. Industr. Mat.* 2013. V. XVI. N. 4(56). P. 87–93.

13. *Markovsky I., Pintelon R.* Identification of linear time-invariant systems from multiple experiments // *IEEE Trans. Signal Process.* 2015. V. 63(13). P. 3549–3554.

14. *Osborne M. R., Smyth G. K.* A Modified Prony Algorithm for Exponential Function Fitting // *SIAM Journal of Scientific Computing.* 1995. V. 16. P. 119–138.

15. *Izmailov A. F. Sensitivity in optimization.* M.: Fizmatlit, 2006.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 96-138
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 96-138

16. *Lomov A. A., Rusinova E. A.* Comparison of the target functions in the Prony's problem of measurement data approximation // *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering.* 2022. V. 11, N. 2. p. 18–27.

17. *Gantmacher F. R. Theory of matrices.* M.: Nauka, 1988.

18. *Lomov, A. A., Fedoseev, A. V.* Comparison of Parameter Identification Methods for Linear Dynamic Systems Under Mixed Noise // *Sib. Zh. Chist. Prikl. Mat.* . 2018. V. 18, N. 3. P. 45–59.

19. *Lomov A. A.* Estimation of trends and identification of time series dynamics in short observation sections // *Izv. Ross. Akad. Nauk, Teor. Sist. Upr.*. 2009. N. 1. P. 25–37.

20. *Wilkinson J. H. Algebraic eigenvalue problem.* M.: Nauka, 1970.

Информация об авторе

Ломов Андрей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент
SPIN 7357-8545 AuthorID 4060
Scopus Author ID 57195387616

Author information

Andrey A. Lomov, Doctor of Mathematics, Associate Professor
SPIN 7357-8545 AuthorID 4060
Scopus Author ID 57195387616

*Статья поступила в редакцию 09.10.2023;
одобрена после рецензирования 19.11.2023; принята к публикации 17.05.2024*

*The article was submitted 09.10.2023;
approved after reviewing 19.11.2023; accepted for publication 17.05.2024*